Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 9

МАТЕМАТИКА

И. Н. ХЛОДОВСКИЙ

ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ И ПОЛИНОМЫ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 III 1938)

1. Проблемой моментов Stieltjes (1) назвал следующую задачу:

Дана последовательность положительных чисел $\{C_k\}$, надо найти не убывающую функцию $\varphi(x)$ такую, что

$$C_k=\int_0^\infty x^k d\varphi(x), \quad k=0, 1, 2 \ldots \tag{I}$$

Произвольная последовательность чисел $\{C_k\}$ позволяет в поле полиномов определить дистрибутивный функционал M следующим образом:

$$M\{a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k\}=a_0c_0+a_1c_1+\ldots+a_kc_k.$$

Введем следующие обозначения:

$$M\left\{\left(\frac{x}{h}\right)^k\left(1-\frac{x}{h}\right)^p\right\}=\Delta_h^p C_k,$$

символом

$$B_n[f(x), h]=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{kh}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h}\right)^k\left(1-\frac{x}{h}\right)^{n-k}$$

обозначим многочлен С. Н. Бернштейна, вычисленный в $(0, h)$ от функции $f(x)$.

Нетрудно видеть, что для произвольного полинома $P(x)$ имеем

$$M\{B_n[P(x), h_n]\}\to M\{P(x)\}, \text{ если } \frac{h_n}{n}\to 0.$$

Это следует из формулы

$$M\{B_n[x^p, h_n]\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)C_p+$$
$$+a_{1p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-2}{n}\right)\left(\frac{h_n}{n}\right)C_{p-1}+\ldots+\left(\frac{h_n}{n}\right)^{p-1}C_1,$$

где $a_{k,p}$ — положительные числа, не зависящие от n.

Заметим, что

$$M\{B_n[1,h_n]\}=C_0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta_{h_n}^{n-k}C_k.$$

2. Определение 1. *Последовательность чисел $\{C_k\}$ назовем абсолютно монотонной в интервале $(0,h)$, если все числа $\Delta_h^p C_k \geqslant 0$.*

Определение 2. *Последовательность чисел $\{C_k\}$ назовем почти абсолютно монотонной, если она допускает построение таблицы с двойным входом $\{C_{k,n}\}$, обладающей следующими свойствами: 1) n-я строка абсолютно монотонна в интервале $(0, h_n)$, 2) $C_{k,n}\to C_k$, 3) $\frac{h_n}{n}\to 0$, если $n\to\infty$.*

Теорема 1. *Числа $\{C_k\}$ будут моментами неубывающей функции тогда и только тогда, если они образуют почти абсолютно монотонную последовательность.*

Предположим, что существует неубывающая $\varphi(x)$, моменты которой равны $\{C_k\}$. Берем возрастающую последовательность чисел h_n таких, что $h_n\to\infty$ и $\frac{h_n}{n}\to 0$, и строим последовательность функций $\varphi_n(x)=\varphi(x)$, $0\leqslant x\leqslant h_n$ и $\varphi_n(x)=\varphi(h_n)$, $x\geqslant h_n$. Последовательность функций $\varphi_n(x)$ позволит определить таблицу $\{C_{k,n}\}$, обладающую свойствами 1), 2) и 3). Действительно, $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$, следовательно:

$$2)\quad C_{k,n}=\int_0^\infty x^k d\varphi_n(x)\to C_k;$$

с другой стороны,

$$1)\quad \Delta_{h_n}^p C_{k,n}=\int_0^{h_n}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^p d\varphi_n(x)\geqslant 0.$$

Переходим к доказательству достаточности. Предположим, что $\{C_k\}$ аппроксимируется таблицей $\{C_{k,n}\}$, удовлетворяющей условиям 1)—3). Каждая строка таблицы определяет функционал M_n. С помощью функции $\theta_\xi(x)=\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$, если $x\lesseqgtr\xi$, и функционала M_n строим следующую последовательность функций:

$$\varphi_n(\xi)=M_n\{B_n[\theta_\xi(x),\ h_n]\}=\sum_{\frac{kh_n}{n}\leqslant\xi}\binom{n}{k}\Delta_{h_n}^{n-k}C_{k,n}.$$

Функции $\varphi_n(\xi)$ не убывают, и их совокупность равномерно ограничена, так как $\varphi_n(\infty)=C_{0,n}$ и последовательность чисел $C_{0,n}$ сходится.

На основании теоремы Helly ([2]) из семейства $\varphi_n(\xi)$ можно выделить последовательность, сходящуюся в основном * к неубывающей $\varphi(\xi)$.

Но

$$\int_0^\infty \xi^p d\varphi_n(\xi)=M_n\{B_n[x^p,h_n]\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)C_{p,n}+\cdots,$$

* Последовательность функций сходится в «основном», если она сходится на всюду плотном множестве точек.

следовательно для сходящейся последовательности $\varphi_n(\xi)$

$$\int_0^\infty \xi^p d\varphi_n(\xi) \to \int_0^\infty x^p d\varphi(x) = C_p,$$

что и требовалось доказать.

3. Hausdorff ([3]) показал, что если $\{C_k\}$ абсолютно монотонна в $(0, h)$, то существует единственная не убывающая $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$4) \quad \varphi(0)=0; \ \varphi(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x-0)+\varphi(x+0)]; \ C_k=\int_0^h x^k d\varphi(x).$$

Теорема Hausdorff'а позволяет каждой строке $\{C_{k,n}\}$, удовлетворяющей условию 1), поставить в соответствие функцию $\psi_n(x)$, удовлетворяющую условиям 4).

Определение 3. *Почти абсолютно монотонную последовательность* $\{C_k\}$ *назовем определенной, если последовательность* $\psi_n(x)$, *определяемая строками каждой аппроксимирующей таблицы, сходится в основном.*

Теорема 2. *Для того чтобы проблема моментов была определенной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{C_k\}$ *была определенной.*

Если каждой аппроксимирующей таблице, удовлетворяющей условиям 1)—3), отвечает сходящаяся в основном последовательность $\psi_n(x)$, то предельные функции, определяемые различными таблицами, равны между собой в точках непрерывности. В противном случае будет существовать таблица, которая определит расходящуюся последовательность $\psi_n(x)$. Основываясь на этом, нетрудно показать достаточность условий теоремы 2. Необходимость же следует из того, что если условия теоремы 2 не выполнены, то последовательность $\psi_n(x)$ содержит по крайней мере две последовательности, сходящиеся в основном к различным пределам, и проблема моментов будет иметь не менее двух не эквивалентных решений.

Поступило
7 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Stieltjes, Ann. de la Faculté de Sci. de Toulouse, IX, 1 (1895). [2] E. Helly, Wien. Ber., **121**, 265 (1912). [3] F. Hausdorff, Math. ZS., **16**, 220 (1923).