Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

АЭРОДИНАМИКА

В. А. БУЛИНСКИЙ

«КОНУСОВИДНЫЕ» ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ (ЗАДАЧА БУЗЕМАНА)

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 26 III 1938)

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматриваются пространственные, стационарные движения идеального, лишенного теплопроводности газа, удовлетворяющие условиям:

1) на границе области, в которой изучается движение, существует точка O такая, что во всякой внутренней точке O' области проекция скорости на касательную плоскость, проведенную в точке O' к сфере с центром в точке O и проходящей через точку O', будет больше местной скорости звука $\left(a=\sqrt{\frac{kp}{\rho}}\right)$;

2) элементы, характеризующие движение в каждой точке области, не зависят от расстояния, на котором находится эта точка от точки O [введенной в 1)].

Примером таких движений может служить обтекание потоком сверхзвуковой скорости конуса с вершиной в точке O, имеющего направляющей кривую некоторого специального вида (соответствующую поперечному сечению какого-либо тонкого крыла с острой передней кромкой) и подчиненного условию, что все образующие этого конуса пересекаются с направлением скорости набегающего потока под такими углами, чтобы модуль $\bar{n}\times\bar{v}$ был больше местной скорости звука a (здесь $\bar{n}$ — единичный вектор соответствующей образующей конуса).

2. Основные уравнения.

$$\operatorname{curl}\bar{v}\times\bar{v}=\frac{k}{k-1}\,p^{\frac{k-1}{k}}\,\nabla\vartheta;\ \operatorname{div}\rho\bar{v}=0;\ \frac{d}{dt}\vartheta=0, \tag{1}$$

где $\bar{v}$—скорость, p — давление, ρ — плотность, $k=\frac{c_p}{c_v}$ — отношение удельных теплоемкостей, $\vartheta=\frac{p^{\frac{1}{k}}}{\rho}$ — потенциальная температура.

Если ввести функцию тока ψ такую, что

$$\rho v_\theta \sin\theta=\frac{\partial\psi}{\partial\lambda};\ \rho v_\lambda=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

(θ и λ — сферические координаты), то легко показать, что $\vartheta=\vartheta(\psi)$.

Воспользовавшись этим, а также соотношением $a^2 = k\,\vartheta^k \rho^{k-1}$, можно систему (1) свести к системе трех скалярных уравнений. Эту систему, если перейти к переменным θ_1 и λ, где $\theta_1 = \cos\theta$, можно записать в виде:

$$
\begin{gathered}
(a^2 - v_\theta^2)\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta_1} - (a^2 - v_\lambda^2)\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} - v_\theta\, v_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta_1} + v_\theta\, v_\lambda \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} = \\
= a^2 v_\theta \cos\theta - \sin\theta\, v_r (v_\theta^2 + v_\lambda^2), \\
v_\lambda \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta_1} = \sin\theta\,(v_\theta^2 = v_\lambda^2), \\
v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta_1} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} = \sin\theta\, v_r v_\lambda + \theta_1 v_\theta v_\lambda - \frac{kp}{k-1} v_\theta \sin\theta \frac{d \ln \vartheta}{d\psi}. \qquad (2)
\end{gathered}
$$

3. Характеристики. Уравнения системы (2), как уравнения гиперболического типа, обладают действительными характеристиками, определяемыми формулами:

$$
\lambda'_{1,2} = \frac{v_\theta v_\lambda \pm a\sqrt{v_\tau^2 - a^2}}{a^2 - v_\theta^2}; \quad \lambda'_3 = -\frac{v_\lambda}{v_\theta}, \qquad (3)
$$

здесь $v_\tau^2 = v_\theta^2 + v_\lambda^2$.

4. Соотношения вдоль характеристик:

$$
\begin{gathered}
\frac{\lambda'_2 - \lambda'_3}{\lambda'_2 - \lambda'_1}\left(\frac{dv_r}{d\theta_1}\right)_1 - \frac{\lambda'_1 - \lambda'_3}{\lambda'_2 - \lambda'_1}\left(\frac{dv}{d\theta_1}\right)_2 = -\frac{v_\tau^2}{v_\theta}, \\
\frac{dv_\theta}{d\theta_1} + \lambda'_{1,2}\frac{dv_\lambda}{d\theta_1} \pm \frac{a v_r \sqrt{v_\tau^2 - a^2}}{(a^2 - v_\theta^2)(v_\lambda + v_\theta \lambda'_{1,2})}\frac{dv_\tau}{d\theta_1} = \\
= (a^2 - v_\theta^2)^{-1}\Big\{ \pm A \sin\theta \frac{v_r v_\lambda}{v_\theta} \pm A\,\theta_1 v_\lambda + \sin\theta\, v_r v_\theta^2 - \\
- a^2 v_\theta \theta_1 \mp \frac{A v_r v_\tau^2 \sin\theta}{v_\theta (v_\lambda + v_\theta \lambda'_{1,2})} - \frac{kp}{k-1}\sin\theta \frac{d\ln\vartheta}{d\psi} \Big\} \qquad (4)
\end{gathered}
$$

(где $A = a\sqrt{v_\tau^2 - a^2}$).

Знаки $+$ и 1 соответствуют производным по направлению первой характеристики, знаки $-$ и 2 — производным по направлению второй характеристики.

При решении задач газовой динамики функция ϑ обычно входит в число условий, задаваемых для решения задачи.

Таким образом система (3) представляет из себя систему трех уравнений, содержащую три неизвестные величины.

5. Условия на поверхности сильного разрыва. Значения гидродинамических элементов на поверхности сильного разрыва связаны соотношениями:

$$
\begin{gathered}
\rho_+ N_+ \overline{V}_+ - \rho_- N_- \overline{V}_- = p_+ \overline{n} - p_- \overline{n}, \\
\rho_+ N_+ - \rho_- N_- = 0, \\
\frac{p_+}{p_-} = \frac{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-}{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}. \qquad (5)
\end{gathered}
$$

Здесь индексы $+$ и $-$ обозначают гидродинамические элементы до и после прохождения поверхности сильного разрыва; N — скорость распространения поверхности сильного разрыва внутри движущейся среды; $\overline{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности разрыва.

Отсюда получается, во-первых, что радиальная составляющая скорости не изменяется при переходе через поверхность сильного разрыва:

$$V_{r_+} = V_{r_-},$$

и, во-вторых, что

$$v_{\theta_+}^2 = (v_{\tau_-} - v_{\lambda_+})^2 \frac{\frac{2}{k+1}\left(v_{\tau_-} - \frac{a_-^2}{v_{\tau_-}}\right) - (v_{\tau_-} - v_{\lambda_+})}{v_{\tau_-} - v_{\lambda_+} + \frac{2}{k+1}\frac{a_-^2}{v_{\tau_-}}}. \qquad (6)$$

6. Обтекание крыла. Обтекание крыла специальной формы является тем случаем «конусовидных» движений, который имеет практический интерес, поэтому здесь будет дано краткое указание для решения этой задачи. Отличие ее от хорошо изученной плоской задачи обтекания крыла заключается в наличии всех трех компонент скорости, однако это не создает трудностей при численном решении. Обычно часть профиля крыла в смежности с острой кромкой бывает образована плоскостями. В этом случае поверхности сильного разрыва, начинающиеся у передней кромки крыла, также будут на некотором протяжении плоскостями. Действительно, если рассмотреть обтекание бесконечного клина (что соответствует началу крыла) по отношению к равномерно и поступательно движущейся системе координат, то для этой системы, при некоторой скорости ее движения, задача сводится очевидно к обтеканию клина потоком, перпендикулярным его ребру.

Направление плоскостей сильного разрыва определяется как направление таких плоскостей, после перехода через которые поток делается параллелен плоской части крыла. После того как будет определен участок поверхности сильного разрыва и значения

$$v_{\theta_+},\ v_{\lambda_+},\ v_{r_+},\ p_+,\ \rho_+,$$

можно, пользуясь соотношениями (4), постепенно определять значение гидродинамических величин в других точках потока (смежных). Удобство дальнейшего решения задачи происходит от того, что первое из уравнений (4) содержит только производную от v_r; следовательно при численном решении v_r с помощью этого соотношения может быть исключена из двух других уравнений (4). Построение искривления поверхности сильного разрыва делается, как обычно.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
2 III 1938.