Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

АЭРОДИНАМИКА

А. Е. ДОНОВ

О ДАВЛЕНИЯХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВИХРЕОБРАЗОВАНИЕМ, ВЫЗВАННЫМ НАЛИЧИЕМ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 26 III 1938)

В настоящей работе изучается двуразмерный, стационарный, лишенный теплопроводности, сверхзвуковой поток идеального газа, обтекающий твердую гладкую стенку (обтекаемый контур), расположенную по отношению к потоку таким образом, что перед ней образуется скачок уплотнения.

До прохождения скачка уплотнения поток предполагается постоянным и параллельным оси абсцисс (невозмущенный поток). Значения скорости, давления, плотности и скорости распространения звука в этом потоке обозначены соответственно через w, p_0, ρ_0, a_0, а отношение $\frac{w}{a_0}$ через M. Так как рассматривается сверхзвуковой поток, то число M больше единицы.

После прохождения скачка уплотнения поток становится, вообще говоря, переменным и завихренным (возмущенный поток). Предметом исследования являются следующие функции от координат xy: v, β, p, ρ, определяющие в возмущенном потоке соответственно величину скорости, угол наклона скорости к оси x, давление и плотность. Функции v, β, p, ρ удовлетворяют уравнениям гидродинамики, условию обтекания твердой гладкой стенки и динамическим условиям на линии скачка уплотнения. Кроме того эти функции, а равным образом и форма обтекаемого контура, предполагаются зависящими от некоторого параметра λ, причем рассматривается такого рода зависимость от λ, что при λ, равном нулю, обтекаемый контур превращается в отрезок оси абсцисс, а возмущенный поток обращается в невозмущенный. Наряду с последним условием ставится еще несколько условий общего характера, гарантирующих регулярность рассматриваемых функций в некоторых областях, на которые можно разбить область, занятую возмущенным потоком.

Так как рассматриваемый нами поток предполагается сверхзвуковым, то область, занятая возмущенным потоком, может быть покрыта двумя семействами характеристик. Как известно, вдоль любой характеристики одного из этих семейств, называемого нами первым, выполняются соотношения:

$$dy = m_1\,dx, \tag{1}$$

$$d(v\cos\beta) + m_2\,d(v\sin\beta) = \frac{\rho F_1\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}}{d\psi}\,dx, \tag{2}$$

а вдоль любой характеристики другого семейства, называемого нами вторым, соотношения:

$$dy = m_2\,dx, \tag{3}$$

$$d\,(v\cos\beta) + m_1 d\,(v\sin\beta) = \frac{\rho F_2\, d\ln\dfrac{\vartheta}{\vartheta_0}}{d\psi}\,dx. \tag{4}$$

Здесь через m_1, m_2, F_1, F_2 обозначены известные функции от v и β; ψ — функция тока, а ϑ и ϑ_0 определяются равенствами:

$$\vartheta = \frac{p}{\rho^k}, \quad \vartheta_0 = \frac{p_0}{\rho_0^k}$$

(k — показатель адиабаты рассматриваемого газа).

Если правые части уравнения (2) и уравнения (4) равны нулю, то эти уравнения могут быть проинтегрированы. В результате интегрирования уравнения (2) получается соотношение:

$$\beta + \varphi = \mathrm{const}, \tag{5}$$

выполняющееся вдоль любой характеристики первого семейства, а в результате интегрирования уравнения (4) соотношение:

$$\beta - \varphi = \mathrm{const}, \tag{6}$$

выполняющееся вдоль любой характеристики второго семейства. Здесь через φ обозначена известная функция от v. Как известно, соотношения (5), (6) являются основными в теории двуразмерного, безвихревого, стационарного, сверхзвукового адиабатического движения идеального газа.

Так как в рассматриваемом нами случае имеет место завихрение возмущенного потока, то правые части уравнений (2), (4) будут, вообще говоря, отличными от нуля, и эти уравнения проинтегрировать не удается. Однако представляется возможным составить такие комбинации дифференциальных уравнений характеристик, что с помощью их удается получить приближенные результаты, учитывающие завихренность. Покажем это.

Легко видеть, что если к уравнениям (1), (2) первого семейства характеристик присоединить выражение для дифференциала функции тока:

$$d\psi = \rho v\,(\sin\beta\,dx - \cos\beta\,dy) \tag{7}$$

и из уравнений (1), (2), (7) исключить dx и dy, то в результате получится уравнение:

$$d\,(v\cos\beta) + m_2\,d\,(v\,\mathrm{si}\qquad) = \Phi_1\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \tag{8}$$

где через Φ_1 обозначена известная функция от v и β. С другой стороны, имея интеграл (5) уравнения:

$$d\,(v\cos\beta) + m_2\,d\,(v\sin\beta) = 0, \tag{9}$$

легко найти такой интегрирующий множитель L_1 этого уравнения, что после умножения на L_1 оно приведется к виду:

$$d(\beta+\varphi)=0. \tag{10}$$

Если теперь обе части уравнения (8) умножить на L_1, то это уравнение примет вид:

$$d(\beta+\varphi)=H_1\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \tag{11}$$

где через H_1 обозначена известная функция от v и β.

Обозначая через H_{10} значение H_1 при $v=w$, $\beta=0$, уравнение (11) можно привести к виду:

$$d(\beta+\varphi)=H_{10}\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}+(H_1-H_{10})\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}. \tag{12}$$

Если λ стремится к нулю, то член $(H_1-H_{10})\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ имеет более высокий порядок малости, чем член $H_{10}\,d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$. После интегрирования обеих частей уравнения (12) вдоль характеристики первого семейства от точки A, расположенной на линии скачка уплотнения, до точки B, расположенной на обтекаемом контуре, получится соотношение:

$$\beta_b+\varphi_b-(\beta_a+\varphi_a)=H_{10}\left(\ln\frac{\vartheta_b}{\vartheta_0}-\ln\frac{\vartheta_a}{\vartheta_0}\right)+\int\limits_{\psi_a}^{\psi_b}(H_1-H_{10})\frac{d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}}{d\psi}\,d\psi, \tag{13}$$

где через β_a, φ_a, ϑ_a, ψ_a обозначены значения β, φ, ϑ, ψ в точке A, а через $\beta_b, \varphi_b, \vartheta_b, \psi_b$ — значения тех же величин в точке B.

Используя динамические условия на линии скачка уплотнения, уравнение Бернулли и некоторые другие условия, которым удовлетворяют фигурирующие в исследовании функции, можно при помощи соотношения (13) и аналогичного ему соотношения, построенного для второго семейства характеристик, построить выражения для гидродинамических элементов потока, пригодные для приближенного вычисления этих элементов. Так например, для давления на обтекаемом контуре получится выражение:

$$p=p_0(1+c_1\beta_k+c_2\beta_k^2+c_3\beta_k^3+c_4\beta_{k0}^3+c_5\beta_k^4+c_6\beta_{k0}^4+c_7\beta_k\beta_{k0}^3+ \\ +c_8x\beta_{k0}^3\beta_{k0}'+S_1\lambda^5), \tag{14}$$

где через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 обозначены постоянные числа, легко вычисляемые по элементарным формулам, если заданы k и M, через x — абсцисса точки, расположенной на обтекаемом контуре, через β_k — угол наклона скорости к оси x на обтекаемом контуре, рассматриваемый как функция от x и λ, через β_{k0} и β_{k0}' — значения этой функции и ее производной по x в передней крайней точке обтекаемого контура ($x=0$), через S_1 — некоторая ограниченная функция от x и λ. Если в передней крайней точке обтекаемого контура провести касательную к этому контуру и дополнить обтекаемый контур прямолинейным отрезком этой касательной, то при достаточно малом λ явление вихреобразования будет устранено, причем общий характер обтекания при этом не нарушится. Сравнивая выражение для давления на таком дополненном контуре с формулой (14) и обозначая через Δp давление, обусловленное завихренностью возмущенного потока, получаем:

$$\Delta p=p_0(c_8x\beta_{k0}^3\beta_{k0}'+S\lambda^5) \tag{15}$$

где через S обозначена некоторая ограниченная функция от x и λ. При стремлении λ к нулю величины $\beta_{k0}^3 \beta'_{k0}$, λ^4 имеют одинаковый порядок малости; поэтому для малых значений λ приближенное выражение для давления, обусловленного вихрями, будет на обтекаемом контуре иметь вид:

$$\Delta p \approx p_0 c_8 x \beta_{k0}^3 \beta'_{k0}. \tag{16}$$

Ленинградский государственный университет.
Институт математики и механики.

Поступило
2 III 1938.