Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. С. ПОНТРЯГИН

# КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПЛЕКСА НА СФЕРУ. II*

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 III 1938)*

В этой заметке дается классификация отображений сферы $S_{n+2}$ в сферу $S_n$ при $n \geqslant 2$, а также устанавливаются некоторые общие соотношения для отображений сферы $S_r$ размерности $r$ в сферу $S_n$ размерности $n$.

Теорема 1. *Имеется ровно два класса отображений сферы $S_4$ в сферу $S_2$.*

Доказательство. В предыдущей моей заметке К. Н. О. I было показано, что число классов отображений сферы $S_4$ в сферу $S_2$ равно числу классов отображений сферы $S_4$ в сферу $S_3$. В силу результатов той же заметки это последнее число классов равно двум.

Теорема 2. *Существует лишь один класс отображений сферы $S_{n+2}$ в сферу $S_n$ при $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем рассматривать лишь аналитические отображения $S_{n+2}$ в $S_n$ [см. К. Н. О. I. D)]. Пусть $f$ — аналитическое отображение $S_{n+2}$ в $S_n$ и $a$ — такая точка из $S_n$, что $f^{-1}(a)$ есть поверхность в $S_{n+2}$, не имеющая аналитических особенностей. Пусть далее $V$ — достаточно малая шаровая окрестность точки $a$, тогда $U = f^{-1}(V)$ распадается на топологическое произведение шара $V$ и некоторой отдельно заданной поверхности $P$. Каждая точка $z \in U$ представляется в форме $z = (x, y)$, где $x \in V$, $y \in P$, при этом $f(z) = f(x, y) = x$. Модифицируя отображение $f$, мы можем достичь того, чтобы оно изометрично отображало шар $(V, y)$ на шар $V$ и шар $(V, y)$ был ортогонален к поверхности $(a, P)$ при произвольном $y \in P$.

Рассмотрим сперва лишь такие отображения, для которых поверхность $P$ гомеоморфна сфере. Если $n \geqslant 4$, а $f$ и $g$ — два отображения рассматриваемого типа, то в виду изотопности в $S_{n+2}$ при $n \geqslant 4$ каждых двух дифференцируемых сфер мы можем предположить, что для обоих отображений $(a, P)$ и $(V, y)$ одинаковы. Таким образом $f(x, y) = g[\psi_y(x), y]$, где $\psi_y$ — некоторое вращение шара $V$, зависящее от точки $y \in P$. Так как в многообразии всех вращений шара $V$ всякий образ двумерной сферы гомотопен нулю, то отображения $f$ и $g$ эквивалентны [см. К. Н. О. I. A)].

* Настоящая заметка является продолжением моей предыдущей заметки под тем же заголовком [ДАН, XIX, № 1—2 (1938)]. При ссылках на нее я буду писать просто К. Н. О. I.

Теоремы 1 и 2 настоящей заметки были доложены от моего имени S. Lefschetz'ем на Международном математическом конгрессе в Осло в 1936 г.

Случай, когда $n=3$, требует специального сравнительно сложного рассмотрения, но результат сохраняется.

Теперь остается свести общий случай к тому, когда $P$ есть сфера. Поверхность $P$, как легко видеть, всегда ориентируема. Пусть $L$ — некоторая простая замкнутая кривая на $P$. Некоторую окрестность кривой $L$ можно покрыть однопараметрическим семейством $\{L_t\}$ простых замкнутых кривых, $-1<t<1, L_0=L$. Рассмотрим в $S_{n+2}$ семейство кривых $\{(x, L_t)\}$, $x \in V$, $0<t<1$. Семейство это очевидно гомеоморфно $n+1$-мерному шару $V'$. Отображая каждую кривую $(x, L_t)$ семейства в соответственную точку из $V'$, мы получим отображение $h'$ некоторого множества из $S_{n+2}$ на $V'$. Считая, что шар $V'$ принадлежит некоторой $(n+1)$-мерной сфере $S_{n+1}$, мы можем распространить отображение $h'$ в отображение всей сферы $S_{n+2}$ в сферу $S_{n+1}$ [см. К. Н. О. I. В)]. Полученное так отображение $h$ сферы $S_{n+2}$ в сферу $S_{n+1}$ может быть гомотопно нулю или не гомотопно нулю (см. К. Н. О. I); в первом случае мы скажем, что кривая $L$ имеет индекс нуль, а во втором — индекс единицу. Оказывается, что для гомологичных между собой кривых на $P$ индексы совпадают, а при гомологическом сложении двух кривых индексы складываются по модулю два. Из этого нетрудно заключить, что на поверхности $P$ имеется кривая, негомологичная нулю, индекс которой равен нулю, конечно если поверхность $P$ не распадается в систему сфер. Пусть $L$ — фиксированная кривая, обладающая указанными свойствами. Обозначим через $P'$ некоторую дифференцируемую поверхность из $S_{n+2}$, гомеоморфную кругу, которая пересекается с $(a, P)$ лишь по своей границе $(a, L)$. Исходя из этой конструкции, можно модифицировать отображение $f$ так, чтобы для вновь полученного отображения поверхность $P$ имела бы род, на единицу меньший, чем род поверхности $P$ для исходного отображения. Применяя последовательно указанные модификации, мы достигаем того, что поверхность $P$ будет распадаться в конечную систему сфер, а конечную систему сфер уже нетрудно свести к одной сфере.

Таким образом теорема доказана.

Мне представляется целесообразным организовать совокупность классов отображений сферы $S_r$ в сферу $S_n$, сконструировав из этой совокупности группу.

Определение. Пусть $S'_r$ и $S''_r$ — две ориентированные сферы, а $f'$ и $f''$ — их отображения в сферу $S_n$. Отображения $f'$ и $f''$ будем считать эквивалентными, если существует такое гомеоморфное отображение $h$ сферы $S''_r$ на сферу $S'_r$, сохраняющее ориентацию, что отображения $f'h$ и $f''$ сферы $S''_r$ в сферу $S_n$ эквивалентны. В силу этого определения все отображения ориентированных сфер $S_r$ в сферу $S_n$ распадаются на классы эквивалентных.

Внесем теперь в систему этих классов групповую операцию сложения. Пусть $A$ и $B$—два класса отображений, $f \in A$, $g \in B$. Допустим, что $f$ отображает сферу $S'_r$, а $g$ — сферу $S''_r$. Пусть $V'$ — некоторая шаровая окрестность из $S'_r$, а $V''$ — некоторая шаровая окрестность из $S''_r$. Так как отображения $f$ и $g$ определены с точностью до эквивалентности, то без ограничения общности мы можем предположить, что $f(V')=g(V'')=a$, где $a$—точка из $S_n$. Из ориентированных многообразий $S'_r - V'$ и $S''_r - V''$ можно построить ориентированную сферу $S_r$, склеив эти многообразия по их границам так, чтобы ориентации при склеивании были согласованы. Отображения $f$ и $g$ вместе определяют отображение $h$ сферы $S_r$. Класс отображений, содержащий $h$, обозначим через $C$. Устанавливается, что класс $C$ определен однозначно классами $A$ и $B$; таким образом можно положить $C=A+B$. Таким образом мы сконструировали коммутативную группу из классов отображений всевозможных ориентированных сфер размерности $r$ в сферу $S_n$. Нулем этой группы служит класс отображений, гомотопных нулю. Если $A$—некоторый класс отображений и $f \in A$ отображает ориентированную сферу $S'_r$, то отображение $f$, примененное к сфере $S''_r$, отличающейся от $S'_r$ лишь ориентацией, принадлежит классу $-A$, противоположному $A$.

Замечу, что сконструированная здесь группа изоморфна одной из гомотопических групп, построенных Hurewicz'ем.

Задачу классификации отображений сферы $S_{n+k}$ в сферу $S_n$ теперь можно более определенно формулировать как задачу вычисления группы отображений $S_{n+k}$ в $S_n$. Группу эту мы обозначим через $P_k^n$.

Из установленных результатов следует, что группа $P_1^2$ есть свободная циклическая; группа $P_1^n$, при $n \geqslant 3$, — циклическая второго порядка; группа $P_2^2$ — циклическая второго порядка; группа $P_2^n$, при $n \geqslant 3$, содержит лишь единицу.

Нет никаких оснований думать, что группа $P_k^n$ всегда циклическая, другое, естественно возникающее из рассмотренных примеров предположение однако подтверждается.

Т е о р е м а 3. *При $n \geqslant k+2$ группа $P_k^n$ изоморфна группе $P_k^{k+2} = P_k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о сравнительно несложно и опирается на замечания D) и A) моей предыдущей заметки.

Теорема 3 ставит перед нами задачу в первую очередь вычислить группу $P_k$. Задача эта повидимому тесно связана с изучением гомотопических свойств группы ортогональных матриц.

Поступило
28 III 1938.