Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. НАТАНСОН

НЕКОТОРЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1938)

1. Теорема I. *Если ядро сингулярного интеграла*

$$f_n(x)=\int_a^b f(t)\Phi_n(t,x)\,dt \tag{1}$$

удовлетворяет условиям:

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \Phi_n(t,x)\,dt=1 \qquad (\alpha<x<\beta),$$

$$\text{b)}\quad \int_a^b |\Phi_n(t,x)|\,dt<K,$$

$$\text{c)}\quad \int_a^b |\Phi_n(t,x)|\,dx<K,$$

то, каково бы ни было $p\geqslant 1$, для любой $f(x)$ класса (L^p) будет

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p\,dx=0. \tag{2}$$

Доказательство. Условия a) и b) гарантируют, что равенство (2) выполняется для любой ступенчатой функции $f(x)$.

В самом деле, в силу условия a) для ступенчатой функции будет

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \tag{3}$$

в каждой точке x, лежащей внутри промежутка постоянства функции. С другой стороны, в силу условия b) подинтегральное выражение в (2) для ступенчатой функции $f(x)$ оказывается ограниченным равномерно относительно n; поэтому можно применить классическую теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

В работе В. Орлича [1] было доказано, что если равенство (2) имеет место для каждой функции $f(x)$ из некоторого класса (A), везде плотного в (L^p), и если выполнены условия b) и c), то равенство (2) справедливо для всех вообще функций из (L^p). В нашем случае роль класса (A) может играть класс ступенчатых функций.

Замечание. Легко видеть, что теорема остается справедливой, если вместо условия a) потребовать, чтобы интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi_n(t, x)\, dt$$

в промежутке $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ по мере приближался к единице.

2. Теорема II. *Пусть существует функция* $\Psi_n(t, x)$, *возрастающая (как функция от* t) *в промежутке* $a \leqslant t < x$ *и убывающая в промежутке* $x < t \leqslant b$, *такая, что*

$$1) \quad |\Phi_n(t, x)| \leqslant \Psi_n(t, x),$$

$$2) \quad \int_a^b \Psi_n(t, x)\, dt < K.$$

Пусть кроме того выполняется условие a) *теоремы* I. *В таком случае* $f_n(x)$ *почти везде стремится к* $f(x)$ *и если кроме того* $f(x)$ *принадлежит* (L^p), *где* $p > 1$, *то*

$$|f_n(x)| \leqslant \Theta(x),$$

где $\Theta(x)$ *принадлежит* (L^p). *В частности выполняется равенство* (2).

Доказательство. Как доказано Д. К. Фаддеевым [2], из условий теоремы следует, что почти везде выполняется равенство (3).

С другой стороны, мной [3] была установлена оценка

$$|f_n(x)| \leqslant 4KM(x),$$

где

$$M(x) = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} \left[\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|\, dt \right].$$

Наконец Гарди и Литтльвуд [4] доказали, что всякий раз как $f(x)$ принадлежит (L^p) при $p > 1$, функция $M(x)$ также принадлежит этому классу функций, так что за $\Theta(x)$ можно принять $4KM(x)$.

Замечание 1. Для случая $p = 1$ теорема неверна, ибо из суммируемости функции $f(x)$ не вытекает суммируемости $M(x)$. Однако если $f(x)$ такова, что интеграл

$$\int_a^b |f(t)| \cdot \ln^+ |f(t)|\, dt$$

конечен, то (как доказано в той же работе Гарди и Литтльвуда) $M(x)$ суммируема и следовательно

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

Замечание 2. Обе доказанные теоремы приложимы к следующим сингулярным интегралам:

1) Вейерштрасса: $W_n(x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_a^b f(t)\,e^{-n(t-x)^2}\,dt;$

2) Фейера: $F_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt;$

3) Пуассона: $P_r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt;$

4) С. Н. Бернштейна: $B_n(x)=\frac{S_n(x)+S_n\left(x+\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{2},$

где $S_n(x)$ есть сумма первых n членов ряда Фурье функции $f(x)$;

5) Ландау: $L_n(x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 f(t)\,[1-(t-x)^2]^n\,dt;$

6) Валле-Пуссена: $V_n(x)=\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt;$

7) Л. В. Канторовича: $K_n(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^n(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt;$

8) В. А. Стеклова: $S_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$

Наконец теорема I в той ее обобщенной форме, которая указана в замечании, относится к полным ортогональным нормальным системам, подчиненным условию Гаара:

$$\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_k(x)\,\omega_k(t)\right|dt<K.$$

3. Если ядро $\Phi_n(t,x)$ при фиксированном n есть непрерывная функция, то (очевидно линейная) операция

$$U_n(f)=f_n(x)$$

вполне непрерывна, т. е. преобразует всякое ограниченное в пространстве (L^p) множество в компактное множество этого пространства [ибо множество $f_n(x)$ $(n=\text{const})$ компактно в пространстве (C)].

Отсюда на основании одной теоремы С. Мазура ([5]) вытекает

Теорема III. *Пусть интеграл* (1) *с непрерывным ядром* $\Phi_n(t,x)$ *удовлетворяет условиям одной из теорем* I *или* II. *Для того чтобы ограниченное множество* (A), *лежащее в* (L^p), *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы предельный переход* (2) *происходил равномерно на множестве* (A).

При этом теорема I дает условия компактности для $p\geqslant 1$, а теорема II лишь для $p>1$.

Теорема III применима к интегралам $W_n(x)$, $F_n(x)$, $P_r(x)$, $B_n(x)$, $L_n(x)$, $V_n(x)$. К интегралам $K_n(x)$ и $S_h(x)$ она непосредственно не приложима, ибо ядра их разрывны. Однако легко показать, что ограниченное множество из (L^p) интегралом $K_n(x)$ преобразуется в множество, компактное даже относительно равномерной сходимости, поэтому и этот интеграл пригоден для критерия компактности. Наконец при $p > 1$ множество $\{S_h(x)\}$ также компактно в пространстве (C), откуда следует теорема А. Н. Колмогорова ([6]), дающая первый по времени критерий компактности в пространстве (L^p). Теорему же А. Н. Тулайкова ([7]) [устанавливающую, что $S_h(x)$ дает критерий компактности и при $p = 1$] таким рассуждением получить нельзя.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный
университет.

Поступило
25 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Orlicz, Studia Math., **5**, 131 (1934). [2] Д. К. Фаддеев, Мат. сб., **1** (43), 352 (1936). [3] И. П. Натансон, Труды ЛИИ, № 4, 39 (1937). [4] G. H. Hardy a. I. E. Littlewood, Acta Math., **54**, 98 (1930). [5] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 237 (1932). [6] А. Н. Колмогоров, Göttinger Nachrichten, 60 (1931). [7] А. Н. Тулайков, Göttinger Nachrichten, 167 (1933).