Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПЕРАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ПРОСТРАНСТВО L_2

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 III 1938)

Нами были получены ([1]) формулы композиции двойных сингулярных интегралов. Эти формулы позволили нам установить ([2]), что операция сингулярного интегрирования—линейная в пространстве L_2. Обобщая наш результат, Ж. Жиро ([3]) получил формулы композиции многомерных сингулярных интегралов. В этой заметке мы, пользуясь формулами Жиро, докажем следующую теорему:

Многомерные сингулярные интегралы представляют собой линейные операции в пространстве L_2, причем они могут быть разложены в ряды по степеням некоторых унитарных операций.

Рассмотрим пространство L_2 функций $W(M)$, определенных почти везде в m-мерном евклидовом пространстве E координат $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, * удовлетворяющих следующим условиям: 1) произведение

$$[1+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2)^{\frac{m}{2}}]\, W(M) \tag{1}$$

ограничено в бесконечности и 2) $|W(M)|^2$ суммируем в E. Под нормой W будем понимать, как обычно, $\left\{\int\limits_E |W(M)|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Пусть M и M_1—точки в E. Обозначим сферические координаты точки M_1 относительно полюса M через R, Θ_1, $\Theta_2, \ldots, \Theta_{m-2}$, φ. Здесь R—расстояние между M и M_1; углы $\Theta_1, \ldots, \Theta_{m-2}$ меняются от нуля до π, а угол φ—от $-\pi$ до π. Отметим, что сферические координаты точки M относительно полюса M_1 будут: $R, \pi-\Theta_1, \pi-\Theta_2, \ldots, \pi-\Theta_{m-2}, \pi+\varphi$.

Интеграл

$$TW(M)=\int\limits_E W(M_1)\frac{f(M;\Theta_1,\ldots\Theta_{m-2},\varphi)}{R^m}\,d\tau_1, \tag{2}$$

понимаемый в смысле его главного значения, существует, если функция (1) удовлетворяет в E условию Hölder'a ** и выполнено равенство

$$\int\limits_S f(M;\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi)\,d\omega=0. \tag{3}$$

---

* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$—точка пространства E.

** Функции $W(M)$, удовлетворяющие этому условию, назовем функциями класса H.

Здесь S—гиперсфера радиуса 1 с центром в M. Мы предполагаем, что f ограничена и удовлетворяет условию Lipschitz'а. Операции (2) коммутативны, если f не зависит от M; в общем случае $T_1T_2-T_2T_1$ есть операция, вполне непрерывная в L_2. Операция (2) переводит функцию класса H в функцию того же класса ([4]).

Разложим $f(M;\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi)$ в ряд по m-мерным сферическим функциям

$$f(M;\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{n,\,m}(M;\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi). \tag{4}$$

По упомянутым выше формулам Жиро операции

$$a(M)\,W(M)+\int_E W(M_1)\,\frac{f(M;\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi)}{R^m}\,d\tau_1 \tag{5}$$

приводится в соответствие функция

$$F=a(M)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_nP_{n,\,m}(M;\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi);\ \mu_n=\frac{i^n\pi^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}, \tag{6}$$

которую мы назовем символом * операции (5). Сумме и произведению операций вида (5) соответствуют символы, равные сумме или произведению символов этих операций. Операцию (5) мы будем записывать в виде $F\star W(M)$.

Система функций

$$e^{2ik_1\Theta_1+2ik_2\Theta_2+\ldots+2ik_{m-2}\Theta_{m-2}+ik\varphi}$$

ортогональная и полная в параллелепипеде

$$0\leqslant\Theta_\alpha\leqslant\pi,\quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

Отсюда следует, что операция (5) может быть разложена в ряд по степеням операций, символы которых суть

$$e^{i\varphi},\ e^{2i\Theta_\alpha},\ \alpha=1,2,\ldots,m-2. \tag{7}$$

Д о к а ж е м, ч т о о п е р а ц и и, с о о т в е т с т в у ю щ и е с и м в о л а м (7), — у н и т а р н ы е в L_2. Достаточно установить это для функций класса H, так как множество этих функций плотное в L_2.

Пусть символ $e^{2i\Theta_\alpha}$ соответствует операции

$$a_\alpha W(M)+\int_E W(M_1)\,\frac{f_\alpha}{R^m}\,d\tau_1=e^{2i\Theta_\alpha}\star W(M)=V(M). \tag{8}$$

Разложим f_α по m-мерным сферическим функциям:

$$f_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n^{(\alpha)}(\Theta_1,\ldots,\Theta_{m-2},\varphi); \tag{9}$$

---

* Ср. ([1]).

тогда

$$e^{2i\Theta_a} = a_a + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n Q_n^{(a)} (\Theta_1, \ldots, \Theta_{m-2}, \varphi). \tag{10}$$

Можно показать, что число a_a и функции $Q_n^{(a)}$—действительные, и

$$Q_n^{(a)} (\pi - \Theta_1, \ldots, \pi - \Theta_{m-2}, \pi + \varphi) = (-1)^n Q_n^{(a)} (\Theta_1, \ldots, \Theta_{m-2}, \varphi).$$

Имеем:

$$I = \int_E |V(M)|^2 d\tau = \int_E \overline{V(M)}\, d\tau \left[a_a W(M) + \right.$$

$$\left. + \int_E \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(a)} (\Theta_1, \ldots, \Theta_{m-2}, \varphi) \frac{W(M_1)}{R^m} d\tau_1 \right] = a_a \int_E \overline{V(M)}\, W(M)\, d\tau +$$

$$+ \int_E W(M_1)\, d\tau_1 \int_E \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(a)} (\Theta_1, \ldots, \Theta_{m-2}, \varphi) \frac{\overline{V(M)}}{R^m} d\tau =$$

$$= \int_E W(M)\, d\tau \left[a_a \overline{V(M)} + \int_E \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_n^{(a)} (\Theta_1, \ldots, \Theta_{m-2}, \varphi \frac{\overline{V(M_1)}}{R^m} d\tau_1 \right] =$$

$$= \int_E W(M) [e^{-2i\Theta_a} \star \overline{V(M)}]\, d\tau.$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{V(M)} = e^{2i\Theta_a} \star \overline{W(M)}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$I = \int_E |W(M)|^2 d\tau. \tag{11}$$

С некоторыми несущественными изменениями это же доказательство распространяется и на операцию с символом $e^{i\varphi}$.

Сейсмологический институт.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
22 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Матем. сборн., **1** (43), 4, 535—553 (1936). [2] С. Г. Михлин, ДАН, XV, № 8, 429—432 (1937). [3] G. Giraud, C. R., **202**, № 26, 2124—2127 (1936). [4] G. Giraud, Ann. de l'École Norm., **51**, fasc. 3 et 4, 251—372 (1934).