Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. БЕБУТОВ

ОДНА ТЕОРЕМА О СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ (1)

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 III 1938)

Цель этой заметки—доказательство следующей теоремы, дающей положительный ответ на вопрос, поставленный П. С. Александровым.

Т е о р е м а. *Симплициальный комплекс K размерности n может быть двойственным симплициальному комплексу только в одном из следующих двух случаев*:

при $n=1$: *комплекс K является или простым замкнутым полигоном или совокупностью нескольких простых замкнутых полигонов, попарно не пересекающихся*;

при $n>1$: *кмплекс K состоит из одного или нескольких непересекающихся комплексов, изоморфных границе $(n+1)$-мерного симплекса.*

В обоих случаях комплекс K изоморфен двойственному ему комплексу L.

При этом двойственность комплексов понимается в классическом смысле (Poincaré): два комплекса K и L называются двойственными, если существует взаимно однозначное соответствие f между элементами K и L, удовлетворяющее следующему условию: если симплекс x' является гранью симплекса x в одном из этих комплексов, то симплекс $f(x)$ является гранью симплекса $f(x')$, в другом.

Заметим наконец, что эту теорему можно сформулировать следующим образом:

Данное дискретное пространство и двойственное ему могут быть одновременно изоморфны симплициальным комплексам только в двух указанных случаях (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае, когда $n=1$, теорема очевидна, пусть $n>1$.

Обозначим через K и L два двойственных симплициальных комплекса, через x и y элементы этих комплексов. Элемент, двойственный элементу x, мы будем обозначать $f(x)$. Мы предположим, что оба эти комплекса являются *связными* (в противном случае рассмотрим компоненты этих комплексов). Таким образом нам нужно доказать, что при сформулированных условиях оба комплекса изоморфны границе симплекса.

Легко доказать следующие факты:

1) оба комплекса имеют одну и ту же размерность;

2) они имеют однородную размерность;

3) если обозначать индексом сверху размерность элемента, то

$$f(x^r)=y^{n-r}.$$

Отсюда следует, что число s-мерных симплексов, содержащих x^r как грань, равно числу $(n-s)$-мерных граней $(n-r)$-мерного симплекса т. е. $\binom{n-r+1}{n-s+1}$. В частности отсюда следует, что в каждом из этих комплексов каждую вершину содержит $(n+1)$ симплекс размерности n и каждое ребро принадлежит n симплексам размерности n.

Докажем теперь, что *всякие две вершины* x_1^0 *и* x_2^0 *принадлежат одному и тому же ребру*. Так как данный комплекс связен, то общий случай легко свести к случаю, когда существуют два прилегающих друг к другу ребра $x_1^1=(x_1^0 x_3^0)$ и $x_2^1=(x_3^0 x_2^0)$. Но ребро x_1^1 содержится в n симплексах размерности n, так же как и ребро x_2^1. И те и другие симплексы содержат вершину x_3^0, а так как данную вершину могут содержать только $(n+1)$ симплекс размерности n и (при $n>1$) $2n>n+1$, то по крайней мере один из симплексов, содержащих x_1^1, должен содержать x_2^1, а следовательно и вершины x_1^0, x_2^0, x_3^0. Итак, наше утверждение доказано.

Выберем в одном из наших комплексов вершину x^0. Так как для всякой вершины x_i^0, отличной от x^0, существует ребро $(x^0 x_i^0)$, и общее число ребер, примыкающих к x^0, равно $(n+1)$, *то число вершин в каждом из комплексов* K *и* L *равно* $(n+2)$. В силу двойственности K и L *число n-мерных симплексов в каждом из этих комплексов также равно* $(n+2)$. Остается показать, что например в K можно найти симплекс, содержащий r произвольных вершин, если только $r \leqslant n+1$. Пусть в самом деле $x_1^0, \ldots, x_r^0$ будут r вершин K. Если эти вершины не принадлежат никакому симплексу x^n из K, то существует для всякого x^n вершина x_i^0, ему не принадлежащая, а так как число x^n равно $(n+2)$ и $r \leqslant n+1$, то по крайней мере два симплекса x^n не содержат одну и ту же вершину, но тогда эти симплексы должны совпадать. Полученное противоречие доказывает нашу теорему.

Поступило
20 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandroff-Hopf, Topologie, I, Berlin (1935). [2] P. Alexandroff, Матем. сборн., 2 (44), № 3, стр. 518.