Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. П. КОЛЯНКОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О. Ю. ШМИДТА

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 1 II 1938)

§ 1. В настоящей работе обобщается один из результатов, содержащихся в работе академика О. Ю. Шмидта «Группы, все подгруппы которых специальные» (1). Как известно, группа называется специальной, если она является прямым произведением своих подгрупп Силова. У специальной группы все подгруппы также являются специальными группами. В вышеназванной работе О. Ю. Шмидт нашел все неспециальные группы, обладающие тем же свойством (т. е. что все подгруппы специальны). Оказалось, что все такие группы разрешимы и порядок их является произведением двух степеней простых чисел. Эти результаты О. Ю. Шмидта содержат как частный случай результаты, полученные ранее G. A. Miller'ом и H. C. Moreno, которые исследовали группы, все подгруппы которых коммутативны (2).

В настоящей работе рассматриваются группы, имеющие только один класс неспециальных подгрупп. Мы докажем, что, подобно группам, исследованным О. Ю. Шмидтом, эти группы разрешимы.

§ 2. Докажем следующую лемму:

Пусть В *есть некоторая группа и* $\mathfrak{P}$ *максимальное пересечение двух каких-либо подгрупп Силова этой группы. Тогда нормализатор подгруппы* $\mathfrak{P}$ *относительно группы* В *не может быть специальной группой.*

(При доказательстве предполагается, что пересечение $\mathfrak{P}$ является собственной подгруппой подгруппы Силова, т. е. не равно ни единице, ни самой подгруппе Силова. Мы называем пересечение двух подгрупп Силова максимальным, если оно не содержится в некотором большем пересечении подгрупп Силова той же группы.)

Докажем эту лемму. Пусть Г и Г'—две подгруппы Силова порядка p^a (p—простое число) группы В. Мы предполагаем, что подгруппа $\mathfrak{P}$ порядка p^b является пересечением этих двух подгрупп Силова. Пусть это пересечение максимально. Тогда, как доказал Burnside, в группе В должен иметься элемент порядка, не делящегося на p, перестановочный с подгруппой $\mathfrak{P}$ и не перестановочный с подгруппами Силова, в которые входит $\mathfrak{P}$ (3). Пусть это будет элемент Q порядка q (не делящегося на p). Пусть $\mathfrak{P}_1$ есть нормализатор подгруппы $\mathfrak{P}$ относительно Г (очевидно $\mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}$) и $\mathfrak{N}$ есть нормализатор подгруппы $\mathfrak{P}$ относительно В. Очевидно $\mathfrak{N}$ содержит как Q, так и $\mathfrak{P}_1$. Если $\mathfrak{N}$—специальная группа, то $Q^{-1}\mathfrak{P}_1 Q = \mathfrak{P}_1$, т. е. $\mathfrak{P}_1$ содержится как в подгруппе Силова Г, так и в подгруппе

Силова $Q^{-1}\Gamma Q$, отличной от Г. Но в таком случае $\mathfrak{P}$ не является, вопреки условиям леммы, максимальным пересечением двух подгрупп Силова группы В. Следовательно $\mathfrak{N}$ не может быть специальной группой, и наша лемма доказана.

§ 3. Мы используем в настоящей работе следующую теорему, доказанную В. К. Туркиным в работе «Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe ([4]): *Пусть* В*—группа порядка* n *и* Г*—подгруппа порядка* g, *т. е.* $n = g \cdot m$ (g *и* m*—взаимно простые*). *Пусть* Р*—коммутант подгруппы* Г. *Если в* Г *заключается такой элемент* A, *не принадлежащий коммутанту* Р, *что из каждого равенства вида*:

$$T^{-1}A^{\lambda}T = G$$

(T*—элемент* В, G*—элемент* Г) *следует равенство вида*:

$$X^{-1}A^{\lambda}X = G$$

(X*—элемент* Г), *то* В *имеет нормальный делитель, порядок которого делится на* m.

Обозначим через В некоторую группу, имеющую только один класс неспециальных подгрупп. Нам требуется доказать, что эта группа разрешима. Для этого достаточно доказать, что эта группа не может быть простой. Действительно, мы можем предположить, что наше утверждение уже доказано для всех групп меньшего порядка. Тогда всякий нормальный делитель и всякая дополнительная группа нашей группы будут разрешимы, а следовательно и сама группа будет разрешимой.

Предположим, что группа В, имеющая один класс неспециальных подгрупп, является простой группой. Докажем, что мы придем в этом случае к противоречию. Пусть Г есть подгруппа Силова порядка p^{α} группы В. На основании вышеприведенной теоремы В. К. Туркина в подгруппе Г должен содержаться элемент P, для которого имеет место равенство

$$T^{-1}P^{\lambda}T = G,$$

где T—элемент группы В, не входящий в Г, а G—элемент подгруппы Г. При этом ни для какого элемента X, входящего в Г, не выполняется равенство

$$X^{-1}P^{\lambda}X = G$$

(если бы такого элемента P не имелось в Г, то на основании упомянутой теоремы группа В имела бы нормальный делитель).

Из равенства $T^{-1}P^{\lambda}T = G$ следует, что $P^{\lambda} = TGT^{-1}$, т. е. $P^{\lambda} \subset T\Gamma T^{-1}$. Рассмотрим следующие два случая.

1) $T\Gamma T^{-1} \neq \Gamma$, в этом случае элемент P^{λ} содержится в некотором максимальном пересечении двух подгрупп Силова порядка p^{α} группы В. Нормализатор этого пересечения на основании выше доказанной леммы не может быть специальной группой. Следовательно в группе В будет иметься неспециальная подгруппа порядка $p^{\varphi}m$, где m не делится на p. Эта подгруппа является нормализатором максимального пересечения двух подгрупп Силова, содержащего элемент P.

2) $T\Gamma T^{-1} = \Gamma$, в этом случае нормализатор подгруппы Г относительно группы В отличен от Г. Этот нормализатор не может быть специальной подгруппой, так как в противном случае имело бы место равенство:

$$T^{-1}P^{\lambda}T = P^{\lambda},$$

т. е. можно было бы положить $X = 1$.

Итак, мы доказали, что в обоих случаях группа В может быть простой лишь тогда, когда она содержит неспециальную подгруппу порядка $p^{\varphi}m$ ($\varphi \leqslant \alpha$, m не делится на p).

§ 4. Как известно, порядок простой группы должен делиться по крайней мере на три различных простых числа. Следовательно мы можем положить, что порядок группы В равен $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}u$ (p, q, r—простые числа). Мы доказали, что группа В должна иметь неспециальную подгруппу порядка $p^{\varphi}m$. Число m есть некоторый (отличный от единицы) делитель числа $q^{\beta}r^{\gamma}u$. Мы можем предположить, что m делится на q.

Предположим сначала, что m не делится на r. Рассуждая аналогично вышеизложенному, мы можем доказать, что группа В должна содержать неспециальную подгруппу порядка, делящегося на некоторую степень числа r. Эта неспециальная подгруппа не может быть сопряжена с неспециальной подгруппой порядка $p^{\varphi}m$ (порядки сопряженных подгрупп должны быть равны). Мы получили таким образом, вопреки условиям, что группа В содержит по крайней мере два класса неспециальных подгрупп.

Предположим теперь, что m делится на r. Тогда порядок $p^{\varphi}m$ рассматриваемой неспециальной подгруппы делится на три различных простых числа. Следовательно (см. вышеуказанную работу О. Ю. Шмидта) эта подгруппа должна иметь по крайней мере одну неспециальную подгруппу. Мы опять получили, что группа В содержит по крайней мере два класса неспециальных подгрупп.

Итак, нами доказана следующая теорема:

Группа, имеющая только один класс неспециальных подгрупп, разрешима.

Поступило
20 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Математический сборник (1924). [2] Transactions of the American Mathematical Society, 4. [3] Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2 ed., 153 (1911). [4] Mathematische Annalen, **111**, 281.