Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. ЛИБЕРМАН

О НЕКОТОРЫХ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА СВОЙСТВАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 III 1938)

Будем говорить, что множество $U=\{u\}$ стягиваемо в точку, если существует функция $f(u,t)$, определенная на множестве $U=\{u\}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, такая, что

1) $f(u,t)\in U$, $f(u,0)=u$;

2) $\lim\limits_{u'\to u} f(u',t)=f(u,t)$;

3) для всяких $u\in U$ и $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из $|t'-t|<\delta$ следует, что $\rho[f(u,t);\ f(u,t')]<\varepsilon$;

4) $f(u,1)=w\in U$ для всех $u\in U$.

Пусть дано замкнутое ограниченное множество $P\subset R_n$, где R_n обозначает n-мерное евклидово пространство.

Будем называть гранью $(n-1)$-го порядка, или первой гранью, пересечение нашего множества с $(n-1)$-мерным опорным линеалом.

Определим теперь,что такое грань порядка $(n-k)$. Гранью порядка $(n-k)$ называется первая грань грани $(n-k+1)$-го порядка, рассматриваемой как подмножество того $(n-k+1)$-мерного линеала, в котором она лежит. $(n-k)$-мерным опорным линеалом будем называть $(n-k)$-мерный линеал, опорный к грани порядка $(n-k+1)$ и лежащий в $(n-k+1)$-мерном опорном линеале, который мы будем называть плоскостью грани.

Линеал наименьшего измерения, который содержит грань Γ данного порядка, будем называть ее носителем и обозначать символом $N^k(\Gamma)$, где k — число измерений носителя. Отметим некоторые очевидные свойства грани и ее носителя.

1. $N^k(\Gamma)\cdot P\neq 0$ и $N^k(\Gamma)$ есть всегда плоскость грани.
2. $N^0(\Gamma)$ состоит из единственной точки.
3. Для каждого носителя $N^k(\Gamma)$ и $\varepsilon>0$ существует такой линеал $L_{n-1}(\varepsilon)$, что $\sup\limits_{x\in L_{n-1}(\varepsilon)P}\rho(x,N^k(\Gamma)\cdot P)<\varepsilon$ и $N^k(\Gamma)\subset L_{n-1}(\varepsilon)$.
4. Выпуклая оболочка грани есть грань выпуклой оболочки.

Теорема. *Если все $(n-1)$-мерные сечения множества P стягиваемы в точку, то P выпукло.*

Не нарушая общности, можно предполагать, что R_n является линейным носителем множества P.

Очевидно, что все нульмерные грани множества выпуклы.

Предположим, что мы доказали выпуклость граней порядка k, $n-1>k\geqslant 0$, докажем это для всех $(k+1)$-мерных граней Γ_{k+1}. На основании 1 мы можем предполагать, что плоскость грани Γ_{k+1} есть $N^{k+1}(\Gamma_{k+1})$.

Кроме того на основании 4 и предположений индукции мы можем заключить, что внешняя граница выпуклой оболочки грани Γ_{k+1}, $AR(\Gamma_{k+1})$, рассматриваемой как подмножество $N^{k+1}(\Gamma_{k+1})$, принадлежит нашему множеству P. Докажем, что все внутренние точки выпуклой оболочки $V(\Gamma_{k+1})$ принадлежат множеству P. Действительно, пусть существует точка $x \in V(\Gamma_{k+1})$, причем $x \bar{\in} P$, тогда существует такое $\rho > 0$, что n-мерный шар $Ш^n_\rho(x)$ радиуса ρ и с центром в точке x не содержит точек множества P. Пусть $\sup \rho = 2\delta > 0$ и диаметр Γ_{k+1}, $N(\Gamma_{k+1}) = D$, возьмем в $N^{k+1}(\Gamma_{k+1})$ сферы $S_\delta(x)$, $S_{D+\delta}(x)$ и $S_{\frac{D+2\delta}{2}}(x)$ радиусов δ, $D+\delta$ и $\frac{D+2\delta}{2}$. Сферы $S_\delta(x)$ и $S_{D+\delta}(x)$ определяют в $N^{k+1}(\Gamma_{k+1})$ шаровой слой $K(\delta, D+\delta; x)$, причем $S_\delta(x)$, $S_{D+\delta}(x)$, $S_{\frac{D+2\delta}{2}}$ и $AR(\Gamma_{k+1}) \subset \subset K(\delta, D+\delta; x)$ и не могут быть стягиваемы в нем в точку. Возьмем какую-нибудь точку $y \in S_{\frac{D+2\delta}{2}}(x)$ и проведем через нее и точку x $(n-k)$-мерную плоскость $L_{n-k}(x, y)$, перпендикулярную $N^{k+1}(\Gamma_{k+1})$, и возьмем в этой плоскости $L_{n-k}(y, x)$ шар $Ш^{n-k}_{\frac{D}{2}}(y)$. Рассмотрим

$$T(x) = \sum_{y \in S_{\frac{D+2\delta}{2}}(x)} E_z\left(z \in Ш^{n-k}_{\frac{D}{2}}(y)\right).$$

Из построения $T(x)$ следует, что

$$\Gamma_{k+1} \subset \underline{T(x)};\ K(\delta, D+\delta; x) \subset T(x) \text{ и } AR(\Gamma_{k+1})$$

нельзя стянуть в $T(x)$ в точку $(\star)$.

Согласно 3 найдется для $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ такое $L_{n-1}(\varepsilon)$, что

$$\sup_{x \in L_{n-1}(\varepsilon) P} \rho\,(x, \Gamma_{k+1}) < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad L_{n-1}(\varepsilon) \supset N^{k+1}(\Gamma_{k+1}),$$

следовательно

$$L_{n-1}(\varepsilon) P \subset T(x) \, (\star\star),$$

но так как $L_{n-1}(\varepsilon) P$ стягиваемо в точку, то $AR(\Gamma_{k+1})$ можно в нем стянуть в точку, но тогда вследствие $(\star\star)$ $AR(\Gamma_{k+1})$ можно стянуть в точку в $T(x)$, а это противоречит $(\star)$, следовательно точка $x \in \Gamma_{k+1}$ и следовательно Γ_{k+1} совпадает со своей выпуклой оболочкой. Следовательно $AR(P) \subset P$, а тогда вследствие того, что все сечения множества P стягиваемы в точку, $V(P) = P$, что и требовалось доказать.

Будем называть множество $U = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ слабо односвязным, если все A_i стягиваемы в одну точку и кроме того $A_{i+1} \subset A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Возьмем опорную плоскость L_{n-1} ко множеству P и плоскость $R_{n-1} \| L_{n-1}$, лежащую от L_{n-1} на расстоянии, не превосходящем ε. Назовем пересечение полосы, определяемой этими плоскостями, с множеством P «ε-горбушкой».

Тогда имеет место следующая теорема, доказываемая аналогично предыдущей.

Теорема. *Если все «ε-горбушки» замкнутого слабо односвязного множества $P \subset R_n$ слабо односвязны, то P есть выпуклое тело.*

Ленинградский государственный
университет.

Поступило
9 III 1938.