Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 6—7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. КУКЛЕС

О ЦЕНТРАХ И ФОКУСАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 IV 1938)

1. В настоящей работе исследуются особые точки фазовой плоскости для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x, y)}{y} \tag{1}$$

(где F — аналитическая функция) в том случае, когда эти точки могут представлять собой центр или фокус. Как известно, существующие методы для отличия центра от фокуса [методы Poincaré (1), Bendixon'a (2) и Frommer'a (3)] не дают достаточных условий для обнаружения центра; фокус же при помощи этих методов обнаруживается лишь после неопределенно большого числа операций. Сложность же нахождения последовательных функций u_n по методу Bendixon'a [можно легко показать, что этот метод в применении к уравнению (1) полностью совпадает с методом последовательных приближений Picard'a] или фокусных величин B_n по методу Frommer'a делает применение этих методов практически невозможным даже в весьма простых случаях*.

В настоящей работе я предлагаю новый метод для отличия центра от фокуса, который позволяет в некоторых случаях установить наличие центра при помощи конечного числа операций. Метод этот основан на следующих теоремах, которые мы будем излагать в порядке их возрастающей общности.

1) Обозначим нечетную относительно y часть функции $F(x, y)$ через A, а четную относительно x часть этой функции через B и заметим, что во всех дальнейших рассуждениях мы будем подразумевать, что уравнение возможных касательных Poincaré дает во всех случаях мнимые корни, что соответствует предположению о том, что в начале координат мы имеем либо центр, либо фокус.

Теорема 1. *В области, где функция* $\frac{A}{y}$, *не будучи тождественно равной нулю, сохраняет знак, или функция* $\frac{B}{y}$, *не будучи тождественно равной нулю, сохраняет знак, не существует ни одной замкнутой*

---

* Заметим, что метод Bendixon'a полностью вытекает из так называемого метода Ляпунова (4). Что же касается метода Frommer'a (представляющего собой в сущности развитие метода, первоначально предложенного Poincaré), то геометрические идеи, лежащие в основе его, содержатся во «втором методе Ляпунова» (5). Это последнее обстоятельство [о котором повидимому не знал Frommer, ничего не упомянувший о Ляпунове в своей работе (3)] было отмечено Н. Моисеевым (6).

характеристики, окружающей начало координат. Если же $A=0$, то начало и все другие особые точки уравнения (1) (кроме седел) будут центрами. Если $B=0$, то начало будет центром, в то время как другие особые точки могут быть фокусами.*

Следствие. В случае, если $F(x,y)=f(x)+\varphi(y)$, необходимым и достаточным условием для существования центра является $A=0$. В последнем случае уравнение не будет иметь никаких других особых точек кроме центров и седел.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ay^3+bx^3y^2+cx^2}{y}; \quad \frac{A}{y}=ay^2.$$

Если $a\neq 0$, то уравнение вообще не имеет ни одной замкнутой характеристики. В противном случае начало будет центром.

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+ayx^3+by^2x^3+cx^4y+dx^5y^2+ex^5y^3}{y}; \quad \frac{A}{y}=x^3(a+cx+ex^2y^2);$$

$$\frac{B}{y}=cx^4.$$

Если $c\neq 0$, то нет ни одной замкнутой характеристики. В противном случае в начале будет центр.

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+\sum\limits_2^\infty \alpha_n x^n+\sum\limits_1^\infty \beta_k y^k}{y}; \quad \frac{A}{y}=\sum_1^\infty \beta_{2k+1}y^{2k}.$$

Если не все β_{2k+1} равны нулю, то уравнение не имеет ни одной точки типа центра. Однако здесь возможны предельные циклы, причем число их может быть равным числу положительных нечетной кратности корней уравнения: $\frac{A}{v}=0$.

Составим теперь две функции $A^\star(x,y)$ и $B^\star(x,y)$ следующим образом: пусть $u(x)$ и $v(y)$ — две какие-либо функции, удовлетворяющие условиям:

$$u(0)=u'(0)=0; \quad u''(0)>0 \tag{2}$$

и

$$v(0)=v'(0)=0; \quad v''(0)>0. \tag{3}$$

Представим нашу функцию $F(x,y)$ в одной из двух следующих форм:

$$1) \quad F(x,y)=\Phi_0(u,y)\,u'+B^\star(x,y)$$

или

$$2) \quad \frac{F(x,y)}{y}=\frac{\Phi_0(x,v)}{v'}+\frac{A^\star(x,y)}{y},$$

где Φ (или Φ_1) — аналитические функции. Можно показать, что либо можно выбрать функцию Φ так, чтобы $B^\star$ было равно нулю, или существует полином Φ такой, чтобы $B^\star$ сохраняло знак при малых x (и фиксированных y); точно так же либо существует функция Φ_1 такая, чтобы $A^\star$ было равно нулю, либо существует полином Φ_1 такой, чтобы

* За исключением, может быть, нескольких предельных циклов, уравнения которых имеют вид $AB=0$.

функция $\frac{A^\star}{y}$ при малых y (и фиксированных x) сохраняла знак; оба свойства эти имеют место для произвольных аналитических функций $u(x)$ и $v(y)$, удовлетворяющих условиям (2) и (3)*.

Теорема 2. *В области, где функция* $\frac{A^\star}{y}$ *или функция* $\frac{B^\star}{y}$ *сохраняют знак, не существует ни одной замкнутой характеристики, окружающей начало**. Если же* $A^\star=0$, *то начало и остальные особые точки (кроме седел) будут центрами. Если* $B^\star=0$, *то начало будет центром, в то время как другие особые точки могут быть фокусами.*

Легко видеть, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2, так как, если положить $u=\frac{1}{2}x^2$, а $v=\frac{1}{2}y^2$, то функции $B^\star$ и $A^\star$ выродятся соответственно в функции A и B теоремы 1.

Следствие. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)\varphi(y)+f_1(x)\varphi_1(y)}{y} \tag{2'}$$

необходимым и достаточным условием существования центра в начале координат является: $A^\star B^\star=0$.

Примечание. Если $f(x)$ содержит первую степень x, то можно положить $u=\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$. В противном случае можно положить

$$u=\left[\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

причем подразумевается, что младший член функции $f(x)$ имеет степень $2n+1$, а младший член функции $f_1(x)$ имеет такую же или высшую степень. В этом случае $\varphi(y)$ необходимо содержит постоянный член, что дает возможность положить: $v=\int\limits_0^y \frac{y\,dy}{\varphi(y)}$.

Пример 4.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_n(x)(y-\alpha)(y+\beta)+\varphi_q(y)f_n(x)F_p(x)}{y},$$

где α и β — рациональные положительные числа, а f_n, φ_q и F_p — полиномы, причем f_n содержит первую степень x.

Первое условие ($B^\star=0$) соблюдается тогда и только тогда, когда

$$F_p(x)=\Phi[P_{k+1}(x)], \tag{4}$$

где $P_{k+1}(x)=\int\limits_0^x f_n(\alpha)d\alpha$. Выполнение условия (4) весьма быстро проверяется при помощи следующего соображения: условие (4) выполняется тогда и только тогда, когда оба полинома F_p и P_{k+1} являются полиномами от некоторого полинома $q_e(x)$, степень которого является общим делителем (отличным от единицы) степеней обоих данных полиномов [в частности функция $q_e(x)$ может совпадать с одним из данных полиномов].

---

* Вышеуказанные полиномы находятся однозначно при условии, чтобы они имели наименьшую степень из всех возможных.

** За исключением, может быть, нескольких предельных циклов, уравнения которых имеют вид $A^\star B^\star=0$.

Так например, если $P_{k+1}(x)$ представляет собой полином 5-й степени или аналитическую функцию от этого полинома, то $F_p(x)$, будучи полиномом, может иметь степень, лишь кратную пяти.

Если первое условие не выполняется, то функция $\varphi_k(y)$ должна удовлетворять второму условию ($A^{\star}=0$), т. е. необходимо иметь:

$$\varphi(y)=(y-\alpha)(y+\beta)\,\Phi\left[(y-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(y+\beta)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right],$$

где Φ — аналитическая функция. Так как α и β рациональны и положительны, то, положив

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{k}{n};\quad \frac{\beta}{\alpha+\beta}=\frac{n-k}{n} \tag{5}$$

(где k и n — целые числа, причем $n>k$), будем иметь:

$$\varphi(y)=\Phi_1\left[(y-\alpha)^k(y+\beta)^{n-k}\right](y-\alpha)(y+\beta).$$

Заметим, что наименьшие значения k и n определяются условием, чтобы дробь $\frac{k}{n}$, определенная из равенства (5), была несократимой.

Рассмотрим теперь уравнение самого общего типа:

$$\frac{dy}{dx}=\Omega(x,y) \tag{6}$$

где Ω — какая-нибудь функция, при которой в начале координат уравнения (6) имеется либо фокус либо центр.

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение* (6) *имело в начале координат особую точку типа центра, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:*

$$\Omega(x,y)=\frac{\Phi(u,v)\,u'_x-v'_x}{v'_y-\Phi(u,v)\,u'_y}. \tag{6'}$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определяются следующими требованиями: либо а) $u(0,y)=0$; $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,y)>0$, причем $v(x,0)=0$ и $\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)>0$, либо б) $u(0,y)=0$; $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}>0$, причем $v(x,0)=0$; $\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)=0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,0)>0$. Функция же Φ_0 может быть произвольной, однозначной. При этом заметим, что если функция Φ такова, что уравнение $\frac{\partial v}{\partial u}=\Phi_0(u,v)$ допускает семейство характеристик, пересекающих ось OY сверху и снизу от начала [при выполнении условия а) настоящей теоремы] или ось OX справа и слева от начала [при выполнении условия б)], то уравнение (6′) будет иметь в начале непременно центр. Если же однозначная функция Φ не обладает этим свойством, то начало координат для уравнения (6′) может представлять собой особую точку иного вида или обыкновенную точку (но во всяком случае не фокус).

Нетрудно видеть, что если мы в частном случае возьмем $u=u(x)$; $v=y$ или $u=x$; $v=v(y)$, то получим достаточные условия образования центра, даваемые теоремой 2.

Доказано, что если функция $y\,\Omega(x,y)$ является аналитической, то либо найдется аналитическая же функция $\Phi(u,v)$ либо начало не является центром.

Разложим $F(x,y)$ [числитель правой части уравнения (1)] в ряд по степеням y:

$$F(x,y)=\omega_0(y)+x\,\omega_1(y)+\ldots+x^n\omega_n(y)+\ldots$$

Тогда, применяя условие б) теоремы 3, получаем самое общее выражение для аналитических функций ω_n, удовлетворяющих условию центра:

$$-\omega_n(y)=\frac{1}{\psi_0}\left[\psi_1\omega_{n-1}+\psi_2\omega_{n-2}+\ldots+\psi_n\omega_0-(n+1)\varphi_{n+1}+f_n(\varphi_0)+\right.$$

$$+\varphi_1 f'_{n-1}(\varphi_0)+\varphi_2 f'_{n-2}(\varphi_0)+\frac{\varphi_1^2}{2!}f''_{n-1}(\varphi_0)+\varphi_3 f'_{n-3}(\varphi_0)+\frac{2\varphi_1\varphi_2}{2!}f''_{n-2}(\varphi_0)+$$

$$\left.+\frac{\varphi_1^3}{3!}f'''_{n-1}(\varphi_0)+\ldots+\frac{\varphi_1^n}{n!}f_0^{(n)}(\varphi_0)+\ldots\right] \qquad (7)$$

где функции $\varphi_0(y)=\frac{1}{2}y^2+\lambda_3y^3+\lambda_5y^5+\ldots+\lambda_{2k+1}y^{2k+1}+\ldots$, функции φ_1, φ_2, ... и т. д.—какие-либо аналитические функции от y,начинающиеся с членов не ниже второй степени, функции

$$\psi_n(y)=\frac{1}{y}\varphi'_n(y),$$

а функции f_n—произвольные аналитические функции от φ_0. Отметим при этом, что всегда при наличии центра, каковы бы ни были данные функции ω_n, равенство (7) должно выполняться при любых наперед заданных функциях f_n (можно даже считать их все нулями или постоянными). Что же касается коэффициентов λ_{2n+1} функции φ_0, то они по данным коэффициентам функций ω_n и выбранным коэффициентам функций f_n находятся однозначно, а по этим коэффициентам однозначно в свою очередь находятся функции φ_1, φ_2, ... и т. д. Определяя из равенства (7) функцию φ_n, мы получаем таким образом следующий критерий для отличия фокуса от центра: каждая функция $\varphi_n(y)$, определяемая равенством

$$n\varphi_n(y)=\psi_0\omega_{n-1}+\psi_1\omega_{n-2}+\ldots+\psi_{n-1}\omega_0+f_n(\varphi_0)+\varphi_1f_{n-1}(\varphi_0)+$$

$$+\varphi_2f'_{n-2}(\varphi_0)+\frac{\varphi_1^2}{2!}f''_{n-1}(\varphi_0)+\varphi_3f'_{n-3}(\varphi_0)+\frac{2\varphi_1\varphi_2}{2!}f''_{n-2}(\varphi_0)+$$

$$+\frac{\varphi_1^3}{3!}f'''_{n-1}(\varphi_0)+\ldots+\frac{\varphi_1^n}{n!}f^{(n)}(\varphi_0),$$

не должна содержать членов с первой степенью y, каковы бы ни были функции f_n.

Пример 5. Пусть $F(x, y)$ есть полином второй степени, т. е. $F(x, y)=x+ax^2+bxy+cy^2$. Приравнивая нулю первые степени φ_1 и φ_2, сразу получаем необходимое условие для центра: $b(a+c)=0$. Как показал еще Frommer ([3]), это условие является вместе с тем и достаточным.

Пример 6. Пусть $F(x, y)$ представляет собой полином третьей степени, т. е.

$$F(x, y)=x+ax^2+bxy+cy^2+dx^3+ex^2y+fxy^2+hy^3.$$

Для отличия фокуса от центра здесь придется составить четыре соотношения между коэффициентами, последовательно приравнивая нулю первые степени функций: φ_3, φ_5, φ_7 и φ_9*. В результате, после соответствующих подстановок и сокращений, приходим к следующим выводам:

1) либо $a = c \neq 0$, $b \neq 0$, $e = h = 0$, $f = d = 0$;
2) либо $a = c = 0$, $e = h = 0$, f, d и b произвольны;
3) либо $b = e = h = 0$, a, c, f и d произвольны;
4) либо $c = 0$, $e = ab$, $h = d = f = 0$, a и b произвольны.

Можно легко показать, что наличие этих условий является достаточным для центра. К тем же результатам можно притти, пользуясь методом Frommer'а. Однако по методу Frommer'а получить вышеуказанный результат было бы весьма затруднительно из-за сложности выкладок.

Рассмотрим теперь уравнение следующего вида:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + x^{2n}\omega_{2n}(y) + x^{2n+2}\omega_{2n+2}(y) + \dots}{y}, \tag{8}$$

где $\omega_{2n}(y)$ и $\omega_{2n+2}(y)$—полиномы, содержащие исключительно нечетные степени.

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием для существования в начале координат центра характеристик, определяемых уравнением* (8), *является*: $\omega_{2n}(y)$ и $\omega_{2n+2}(y)$ *должны быть нулями, т. е. уравнение* (8) *должно иметь вид:* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Отметим, что при доказательстве этой теоремы нами был существенно использован метод, вытекающий из теоремы 3. Методы же Bendixon'а и Frommer'а в применении к уравнению (8) приводят к весьма сложным выкладкам.

Поступило
4 IV 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Poincaré, Journ. de Math. (1895). [2] J. Bendixon, Acta mathematica (1901). [3] M. Frommer, Math. Annalen (1934). [4] Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения (1936). [5] Ляпунов, loc. cit., § 14, 15, 16. [6] N. Moisseev, Math. Annalen, **113**, H. 3 (1936).

* Приравнивание нулю функций $\psi_n(y_0)$ с четными индексами не налагает никаких связей на коэффициенты уравнения, но позволяет лишь находить коэффициенты λ_{2n+1} функции φ_0.