Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 6—7

ГИДРАВЛИКА

И. А. ЧАРНЫЙ

К РАСЧЕТУ КАМЕР, СЛУЖАЩИХ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ДАВЛЕНИЯ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 17 III 1938)

1. Обычно для уменьшения колебаний давления в трубопроводах при неустановившемся течении жидкости применяются камеры большой емкости, включенные в трубопровод. Например при работе поршневых насосов подобной камерой является воздушный колпак, при напорных трубопроводах гидростанций—уравнительная башня.

Технический расчет подобных устройств обычно производится в предположении о несжимаемости жидкости, что при наличии длинных трубопроводов ведет к ошибкам и к расхождению с опытом. В настоящей заметке дается общий метод расчета камер, служащих для уменьшения колебаний давления, с учетом вязкости и сжимаемости жидкости. Поставленная задача формулируется так: к одному концу трубопровода присоединен какой-либо агрегат, дающий возможность по известному закону изменять расход жидкости в зависимости от времени, например поршневой насос, турбина, задвижка и т. п. Агрегат отделен от трубопровода камерой, служащей для уменьшения колебаний давления. Другой конец трубопровода открыт и поддерживается при постоянном давлении, принимаемом за нуль.

Требуется определить размеры камеры, при которых колебания давления от изменения расхода не будут превосходить допустимых, или определить колебания давления при камере заданных размеров.

2. Общее решение указанной выше задачи дано в нашей работе ([1]). Как показано в ([1]), задача заключается в интегрировании уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = 0 \tag{2}$$

у открытого конца трубопровода;

$$v + h\frac{\partial v}{\partial x} = f(t) \qquad \text{при } x = l \tag{3}$$

у агрегата.

Давление в камере определяется из уравнения

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}-\int\limits_0^l\left(\frac{\partial v}{\partial t}+2av\right)dx,$$

что после вычислений, приведенных в [1], дает:

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}+\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho}+\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho}, \tag{4}$$

где ρ—плотность жидкости, p_1—давление в камере, соответствующее первоначальному стационарному расходу;

$$\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho}=-2\pi i\cdot c\cdot\sum_k\frac{\Phi(\omega_k)}{\lambda'(\omega_k)}\cdot Z(\omega_k)\cdot e^{i\omega_k t} \tag{5}$$

суть вынужденные колебания;

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho}=-2\pi\cdot\frac{c^2}{l}\times$$

$$\times e^{-at}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{F(ia+\xi_s)\cdot e^{i\xi_s t}+F(ia-\xi_s)\cdot e^{-i\xi_s t}-\frac{ia}{\xi_s}\left[F(ia+\xi_s)\cdot e^{i\xi_s t}-F(ia-\xi_s)\cdot e^{-i\xi_s t}\right]}{\beta^2\varphi_s^2+\beta+1} \tag{6}$$

суть свободные колебания.

В формулах (1)—(6) обозначено:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}f(\alpha)\cdot e^{-i\omega\alpha}d\alpha=\frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)}, \tag{a}$$

в практических интересных случаях правая часть—рациональная дробь, знаменатель которой $\lambda(\omega)$ имеет простые корни ω_k.

$$f(t)=\frac{Q(t)}{f}, \tag{b}$$

где $Q(t)$—заданный расход, создаваемый или регулируемый агрегатом, отсчитываемый от стационарного расхода, бывшего к моменту времени $t=0$; f—площадь поперечного сечения трубопровода. $f(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле: $f(t)=0$ для $t<0$, $Q(t)$ считается положительным, когда он направлен от камеры к агрегату, и отрицательным, если, наоборот, от агрегата к камере.

$$Z(\omega)=\frac{i\omega+2a}{\sqrt{\omega^2-i2a\omega}\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\omega^2-i2a\omega}}{c}l-\frac{\sqrt{\omega^2-i2a\omega}}{c}h\right)}, \tag{c}$$

—длина трубопровода,

$$c=\sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{d}$$

есть скорость звука в жидкости, текущей в трубе с упругими стенками, K = модуль объемного сжатия жидкости в трубе с упругими стенками, учитывающий совместный эффект сжимаемости жидкости и расширения трубопровода.

$2a$—параметр, учитывающий вязкое трение жидкости о стенки, причем

$$2a = \frac{32\nu}{d^2} \tag{e}$$

для ламинарного режима, ν—кинематический коэффициент вязкости, d—диаметр трубы.

$$2a = \frac{\lambda v_{\text{ср.}}}{2d} \tag{f}$$

для турбулентного режима, λ—коэффициент сопротивления в формуле Д'Арси-Вейсбаха $\left(\lambda \frac{l}{d} \frac{v_m}{2g}\right)$ для потери напора в трубе от трения, $v_{\text{ср.}}$—средняя по времени скорость жидкости в трубе.

Формула (e) дает точный учет эффекта вязкости, формула (f)—приближенный, дающий однако достаточно точные для практики результаты.

h—параметр, зависящий от размеров камеры. Для воздушного колпака при изотермическом режиме для небольших колебаний давления

$$h = \frac{KV_0}{p_0 f}, \tag{g}$$

где V_0, p_0—средние объем и абсолютное давление воздуха в колпаке. Для уравнительной башни (призматической):

$$h = \frac{F}{f} \cdot \frac{K}{\gamma}, \tag{h}$$

где F—площадь поперечного сечения башни, γ—удельный вес жидкости.

$$\beta = \frac{h}{l}. \tag{i}$$

φ_s есть s-й корень трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \varphi_s - \beta \varphi_s = 0, \tag{k}$$

$$\xi_s = \sqrt{\varphi_s^2 \frac{c^2}{l^2} - a^2}. \tag{l}$$

Отметим, что $[a] = T^{-1}$; $[h] = L$. Формулы (5) и (6), понятно, пригодны и для случая $h = 0$, т. е. когда камера отсутствует.

3. Практически наиболее интересны случаи импульсивного изменения и случай периодического изменения расхода $Q(t)$, которые и рассмотрены ниже.

I. Импульсивное изменение расхода:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A \quad \text{для } t > 0, \\ f(t) &= 0 \quad \text{для } t < 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь наиболее интересны собственные колебания, которые определяются из (6). Как показано в ([1]), из (6) получается:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} &= -2Ac \cdot e^{-at} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi_s t - \theta_s) - \frac{a}{\xi_s} \cdot \cos(\xi_s t - \theta_s)}{\varphi_s(\beta^2\varphi_s^2 + \beta + 1)}, \\ &\text{где} \\ \operatorname{tg} \theta_s &= \frac{a}{\xi_s} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

или

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} = -2Ac \cdot e^{-at} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi_s t - 2\theta_s)}{\varphi_s(\beta^2\varphi_s^2 + \beta + 1) \cdot \cos\theta_s}. \tag{8, 1}$$

Ряд (8, 1) очевидно сходится и вполне допускает производство технических расчетов. Обычно β имеет довольно большое значение, $\beta > 10$. В этом случае (8) можно упростить: при большом β φ_1 мало, и из (k) можно считать, заменяя $\operatorname{ctg}\varphi_1 \approx \frac{1}{\varphi_1}$:

$$\varphi_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \tag{9}$$

$$\varphi_s \approx (s-1)\pi, \tag{10}$$

когда $s > 1$. Тогда в (8) или (8, 1) можно ограничиться только первым членом, так как можно показать, что сумма амплитуд высших гармоник (по грубой оценке) составляет меньше 1% амплитуды первой гармоники, таким образом получим из (8, 1):

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} \approx -2Ac \cdot e^{-at} \cdot \frac{\sin(\xi_1 t - 2\theta_1)}{\left(2\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\cos\theta_1}, \tag{11}$$

или, так как по малости a $\cos\theta_1 \approx 1$ и $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ мало по сравнению с $2\sqrt{\beta}$:

$$\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho} \approx -\frac{Ac}{\sqrt{\beta}} \cdot e^{-at}\sin(\xi_1 t - 2\theta_1), \tag{11, 1}$$

где из (l), (8), (9):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\frac{c^2}{\beta l^2} - a^2}, \\ \operatorname{tg}\theta_1 &= \frac{a}{\xi_1}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из (11, 1) видно, что импульсивное изменение скорости A вызывает в камере затухающее гармоническое колебание с периодом $T = \frac{2\pi}{\xi_1}$ и начальной амплитудой*

$$\left|\frac{p_{\text{своб.}}}{\rho}\right| \approx \frac{Ac}{\sqrt{\beta}}.$$

Для уравнительной башни:

$$\beta = \frac{F}{f} \cdot \frac{K}{\gamma l} = \frac{F}{f} \cdot \frac{c^2}{gl}, \tag{13}$$

$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{сек.}^2}$; согласно (h) и из (11, 1) получим расчетную формулу для максимальной амплитуды колебаний уровня в башне:

$$|H| = \left|\frac{p_{\text{своб.}}}{\gamma}\right| \approx A\sqrt{\frac{f}{F}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{14}$$

---

* Затуханием можно пренебречь, так как a весьма мало, а ξ_1 обычно очень велико.

Для воздушного колпака согласно (g)

$$\beta=\frac{KV_0}{p_0 fl}=\frac{\rho V_0}{p_0 fl}c^2$$

и из (11, 1):

$$\left|\frac{p_{\text{своб.}}}{\gamma}\right|\approx A\sqrt{\frac{fl}{V_0}}\cdot\sqrt{\frac{h_0}{g}}, \tag{15}$$

где

$$h_0=\frac{p_0}{\gamma}.$$

II. Периодическое изменение расхода:

$$\left.\begin{array}{lll} f(t)=A\cdot e^{iqt} & \text{для} & t>0, \\ f(t)=0 & \text{для} & t<0. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Вынужденные колебания легко определяются при помощи ряда Фурье, как это сделано в нашей работе, но могут быть также определены и из (5). Из (а):

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty A\cdot e^{-i(\omega-q)\alpha}\,d\alpha=\frac{A}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\omega-q}=\frac{\Phi(\omega)}{\lambda(\omega)}, \tag{17}$$

откуда

$$\left.\begin{array}{r} \Phi(\omega)=\dfrac{A}{2\pi i}, \\ \lambda(\omega)=\omega-q, \\ \omega_1=q. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Из (с):

$$Z(\omega_1)=Z(q)=\frac{iq+2a}{\sqrt{q^2-i2aq}}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\sqrt{q^2-i2aq}}{c}l-\dfrac{\sqrt{q^2-i2aq}}{c}h}=|Z(q)|\cdot e^{i\delta}, \tag{19}$$

где после вычислений получим:

$$|Z(q)|=\frac{r_1}{r_2},$$

причем:

$$\left.\begin{array}{l} r_1=\sqrt[4]{\dfrac{q^2+4a^2}{q^2}}, \\ r_2=\sqrt{\left(\dfrac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}-\beta\varphi\right)^2+\left(\dfrac{\operatorname{sh}2\psi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}+\beta\psi\right)^2}, \\ \varphi=\dfrac{l}{c}\sqrt{\dfrac{\sqrt{q^4+4a^2q^2}+q^2}{2}}, \\ \psi=\dfrac{l}{c}\sqrt{\dfrac{\sqrt{q^4+4a^2q^2}-q^2}{2}}, \end{array}\right\} \tag{20}$$

$$\delta=\theta_3-\theta_2+\theta_1,$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\theta_1=\dfrac{\psi}{\varphi}; \\ \operatorname{tg}\theta_2=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sh}2\psi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}+\beta\psi}{\dfrac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}-\beta\varphi}; \\ \operatorname{tg}\theta_3=\dfrac{q}{2a}. \end{array}\right\} \tag{21}$$

Из (5), (18) и (19):

$$\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho} = -cA\,|Z(q)| \cdot e^{i(qt+\delta)}. \tag{22}$$

Для размаха колебаний давления (разности между максимальным и минимальным давлением) получим из (22):

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)_{\text{вын.}} = \left(\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho}\right)_{\max} - \left(\frac{p_{\text{вын.}}}{\rho}\right)_{\min} = 2Ac\,|Z(q)|,$$

или, так как согласно (16) $2A = v_{\max} - v_{\min} = \Delta v$, разности между наибольшей и наименьшей скоростью жидкости у агрегата:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)_{\text{вын.}} = c \cdot \Delta v \cdot |Z(q)|. \tag{22, 1}$$

Если $f(t)$ есть сумма периодических функций, например задана рядом Фурье, вынужденные колебания находятся суперпозицией (22). В большинстве случаев достаточно ограничиться рассмотрением первой гармоники.

Практически q гораздо больше a; это позволяет упростить (20):

$$\left.\begin{aligned} r_1 &\approx 1, \\ \varphi &\approx \frac{ql}{c}, \\ \psi &\approx \frac{al}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{20, 1}$$

Предыдущие формулы могут быть применены к исследованию различных случаев движения жидкости по трубопроводу с камерой и без нее. Сравнение с опытными данными [опыты Д. З. Лозинского ([3]), Дидерихса и Помроя ([4]), Берга ([2])] показывает хорошее согласие развитой выше теории с экспериментом. Для малых значений $\varphi \approx \frac{ql}{c}$ получаются известные формулы Берга для расчета воздушных колпаков при несжимаемой жидкости.

Московский нефтяной институт
им. акад. Губкина.

Поступило
25 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Чарный, ДАН, XVIII, № 1 (1938). [2] Берг, Поршневые, крыльчатые и ротационные насосы. [3] Д. З. Лозинский, Нефтяное хозяйство, № 5 (1933). [4] Diederichs a. Pomeroy, Trans. A.S.M.E., **51**, **11** (1929).