Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 6—7

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 III 1938)

В предыдущей заметке [1] я указал один класс непрерывных функций, в области которого имеет место теорема единственности для обобщенных рядов Фурье. При этом я предполагал, что функция имеет для всех действительных λ средние значения

$$a(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx. \tag{1}$$

В настоящей заметке я укажу условие, необходимое и достаточное для того, чтобы средние значения (1) существовали для всех действительных λ.

Затем, пользуясь одной теоремой S. Banach'a, я покажу, как следует расширить понятие о среднем значении для того, чтобы оно существовало для всякой измеримой функции.

1. Мы ограничимся L-интегрируемыми в каждом конечном интервале функциями, для которых

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx<\infty. \tag{2}$$

Имеет место простая

Теорема I. *Для того, чтобы у функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению* (2), *средние значения $a(\lambda)$ существовали при всех действительных λ, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность конечных тригонометрических сумм $\{S_n(x)\}$ такая, что*

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}[f(x)-S_n(x)]\,e^{-i\lambda x}\,dx\right|\to 0, \tag{3}$$

если $n\to\infty$.

Доказательство. В начале докажем достаточность. Если (3) имеет место, то при фиксированном λ и произвольном $\varepsilon>0$ можно взять T_0 и n настолько большими, чтобы для $T>T_0$ было

$$\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}[f(x)-S_n(x)]\,e^{-i\lambda x}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $S_n(x)$—конечная тригонометрическая сумма, то можно выбрать $T', T'' > T$ так, чтобы

$$\left| \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} S_n(x) e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{2T''} \int_{-T''}^{T''} S_n(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} f(x) e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{2T''} \int_{-T''}^{T''} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} [f(x) - S_n(x)] e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{2T''} \int_{-T''}^{T''} [f(x) - S_n(x)] e^{-i\lambda x} dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} S_n(x) e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{2T''} \int_{-T''}^{T''} S_n(x) e^{-i\lambda x} dx \right| <$$

$$< \frac{1}{2T'} \left| \int_{-T'}^{T'} [f(x) - S_n(x)] e^{-i\lambda x} dx \right| + \frac{1}{2T''} \left| \int_{-T''}^{T''} [f(x) - S_n(x)] e^{-i\lambda x} dx \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} S_n(x) e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{2T''} \int_{-T''}^{T''} S_n(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно среднее значение $a(\lambda)$ существует. Так как λ было произвольно, то средние значения $a(\lambda)$ существуют при всех действительных λ.

Покажем теперь, что если средние значения $a(\lambda)$ существуют при всех действительных λ и если имеет место (2), то имеет также место (3).

В самом деле в силу (2) может быть только счетное множество значений λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$. Пусть это будут числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ Соответствующие $a(\lambda)$ обозначены через $A_1, A_2, \ldots$ В силу неравенства Бесселя ряд $\sum |A_n|^2$ сходится. Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое $N = N(\varepsilon)$, что $|A_n| < \varepsilon$, если $n > N$. Рассмотрим функцию $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}$. Очевидно, что

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} \varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} R_N(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом функции $f(x)$, у которых средние значения $a(\lambda)$ существуют при всех действительных λ, получаются в результате определенного замыкания совокупности всех конечных тригонометрических сумм.

Следовательно условие, необходимое и достаточное для существования средних значений, можно выразить в терминах почти периодичности.

Теорема II. *Для того, чтобы при всех действительных λ средние значения $a(\lambda)$ существовали, необходимо и достаточно, чтобы для* *каждого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать почти периодическое множество чисел* $\{\tau_n\}$ *такое* (2), *что*

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} \left\{ \overline{\lim} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{c} \int_{x}^{x+c} [f(y+\tau_j)-f(y)]\, dy \right\} e^{-i\lambda x}\, dx \right| < \varepsilon$$

*для каждого** $c > 0$.

Проще выглядит необходимое и достаточное условие для равномерного существования средних значений.

Теорема III. *Для того, чтобы у функции* $f(x)$ *средние значения* $a(\lambda)$ *существовали равномерно при всех действительных* λ, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать относительно плотное множество чисел* $\{\tau\} = \{\tau(\varepsilon)\}$ *и число* $L = L(\varepsilon)$ *так, чтобы при любом* τ

$$\sup_{\lambda} \sup_{x} \frac{1}{L} \left| \int_{x}^{x+L} [f(x+\tau)-f(x)]\, e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon.$$

2. Воспользуемся теперь следующей теоремой S. Banach'a (3):

Пусть E—*множество всех действительных ограниченных функций, определенных в интервале* $[0, \infty]$.

Каждой функции $f(x) \subset E$ *можно отнести число* $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x)$ *так, что выполняются следующие условия* [$f(x)$ и $g(x)$ суть функции из E; a, b и $x_0 \geqslant 0$ — действительные числа]:

1) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} [af(x) + bg(x)] = a \operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x) + b \operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} g(x)$;

2) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x) \geqslant 0$, *если* $f(x) \geqslant 0$;

3) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x+x_0) = \operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x)$;

4) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} 1 = 1$;

5) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) \leqslant \operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$.

Из 5) следует, что если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ существует**, то он совпадает с $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Рассмотрим множество измеримых действительных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{f(x)\}^2\, dx < \infty. \tag{4}$$

Возьмем функцию

$$F(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\, dx \; (T > 0).$$

В силу (4) $F(T) \subset E$.

---

* Мы предполагаем, не нарушая при этом общности, что $f(x)$—действительная функция.

** Знак Lim обозначает некоторый обобщенный предел, в то время как знак lim сохранен для обозначения предела в обычном смысле.

Под средним $M\{f(x)\}$ функции $f(x)$ мы будем понимать $\operatorname*{Lim}_{T\to\infty} F(T)$. Очевидно, что так определенное среднее будет удовлетворять следующим условиям:

1) $M\{af(x)+bg(x)\}=aM\{f(x)\}+bM\{g(x)\}$ [a, b — действительные числа, $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют (4)].

2) $M\{f(x)\}\geqslant 0$, если $f(x)\geqslant 0$.

3) $M\{f(x+x_0)\}=M\{f(x)\}$ (x_0 — действительное число).

4) $M\{1\}=1$.

5) $\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx\leqslant M\{f(x)\}\leqslant\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx.$

Из 5) следует, что если $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx$ существует, то он совпадает с $M\{f(x)\}$.

Обычным способом можно получить неравенство Schwarz'а

$$M\{f(x)g(x)\}\leqslant\sqrt{M\{[f(x)]^2\}\,M\{[g(x)]^2\}}\,.$$

Положим

$$a(\lambda)=M\{f(x)\cos\lambda x\},\qquad b(\lambda)=M\{f(x)\sin\lambda x\}\,.$$

Если $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_N$ — произвольные, отличные друг от друга действительные числа, то, так же как и в теории почти периодических функций Бора, получаем неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{N}\{[a(\lambda_n)]^2+[b(\lambda_n)]^2\}\leqslant M\{[f(x)]^2\}\,.$$

Отсюда следует, что существует только счетное множество значений λ, для которых $a(\lambda)\neq 0$, $b(\lambda)\neq 0$.

Обозначим эти последние значения (в любом порядке) через $0=\Lambda_0$, $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots$, соответствующие $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — через $A_0,A_1,A_2,\ldots$; $B_1,B_2,\ldots$

Таким образом каждой действительной измеримой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (4), можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x)\sim\sum(A_n\cos\Lambda_n x+B_n\sin\Lambda_n x).$$

Для этого ряда Фурье имеет место теорема единственности в таком виде, как она сформулирована в ([1]).

Институт математики и механики.
Харьков.

Поступило
31 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Левитан, ДАН, XVII, 283 (1937). [2] S. Besicovitch, Almost Periodic Functions, p. 55 (1932). [3] S. Banach, Théorie des operations linéaires, p. 33 (1932).