Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 6—7

МАТЕМАТИКА

В. М. ДУБРОВСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЧИСТО-РАЗРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ W. FELLER'а

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1938)

Целью этой заметки является развитие теории чисто-разрывных случайных процессов W. Feller'а в общем случае, соответствующем определениям и постановке проблем в работе А. Н. Колмогорова «Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung».

Обозначим через A множество всех возможных состояний изменяющейся системы и через $\mathfrak{M}$ — совокупность подмножеств множества A, содержащую какие угодно разности и конечные или счетные суммы своих элементов, отдельные элементы A, все множество A и пустое множество. Рассматриваемые в последующем абстрактные интегралы понимаются в смысле Lebesgue'a-Stieltjes'a и определяются относительно семейства $\mathfrak{M}$.

§ 1. Пусть вероятность $\overline{p}(t, x, \tau)$ того, что рассматриваемая система, находясь в момент t в состоянии x, за время $t \leqslant t' < \tau$ так или иначе изменится, и вероятность $\overline{P}(t, x, \tau, \mathcal{E})$ того, что эта система в момент τ окажется в одном из состояний, принадлежащих множеству $\mathcal{E}$ при условии, что ее изменение за время $t \leqslant t' < \tau$ произойдет, определяются равенствами: $\overline{p}(t, x, \tau) = p(t, x)(\tau - t) + \varepsilon_1$, $\overline{P}(t, x, \tau, \mathcal{E}) = P(t, x, \mathcal{E}) + \varepsilon_2$, где данная функция $p(t, x)$ непрерывна по t, измерима по x и удовлетворяет неравенствам: $0 \leqslant p(t, x) \leqslant K(T)$; данная функция $P(t, x, \mathcal{E})$ непрерывна по t, измерима по x и вполне аддитивна относительно $\mathcal{E}$, $0 \leqslant P(t, x, \mathcal{E}) \leqslant P(t, x, A) = 1$; функция $\overline{p}(t, x, \tau)$ измерима по x; функция $\overline{P}(t, x, \tau, \mathcal{E})$ измерима по x и вполне аддитивна относительно $\mathcal{E}$; если $(\tau - t) \to 0$, то $\frac{\varepsilon_1}{\tau - t} \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\left|\frac{\varepsilon_1}{\tau - t}\right| \leqslant M = \text{const}$, $\underset{(A)}{\text{var}}\ \varepsilon_2 < M$, причем все перечисленные условия и оценки относятся к любым τ, x и $\mathcal{E}$, удовлетворяющим условиям: $-T < t < \tau < T = \text{const}$, $x \subset A$, $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$.

Легко видеть, что для вероятности $F(t, x, \tau, \mathcal{E})$ того, что система, находящаяся в момент t в состоянии x, в момент τ окажется в одном из состояний из множества $\mathcal{E}$, имеет место соотношение:

$$F(t, x, \tau, \mathcal{E}) = [1 - p(t, x)(\tau - t)]\, E(x, \mathcal{E}) + \\ + p(t, x)\, P(t, x, \mathcal{E})(\tau - t) + \varepsilon, \tag{1}$$

где $E(x, \mathcal{E}) = 1$, если $x \subset \mathcal{E}$; $E(x, \mathcal{E}) = 0$, если $x \subset A - \mathcal{E}$,

$$\varepsilon = [P(t, x, \mathcal{E}) - E(x, \mathcal{E})]\, \varepsilon_1 + p(t, x)(\tau - t)\, \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Преобразуя множитель $F(s, y, \tau, \mathscr{E})$ в соотношении

$$F(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int\limits_A F(t, x, s, dA_y) F(s, y, \tau, \mathscr{E}) \qquad (t < s < \tau) \tag{2}$$

с помощью формулы (1) и замечая, что $\int\limits_A F(t, x, s, dA_y) E(y, \mathscr{E}) =$ $= F(t, x, s, \mathscr{E})$, легко вывести следующее основное уравнение:

$$\frac{\partial F(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial \tau} = - \int\limits_{\mathscr{E}} F(t, x, \tau, dA_y) p(\tau, y) + \\ + \int\limits_A F(t, x, \tau, dA_y) p(\tau, y) P(\tau, y, \mathscr{E}). \tag{3}$$

Преобразуя же множитель $F(t, x, s, dA_y)$ в формуле (2) с помощью равенства (1) и замечая, что

$$\int\limits_A E(x, dA_y) F(s, y, \tau, \mathscr{E}) = F(s, x, \tau, \mathscr{E}),$$

легко заключить, что имеет место также другое основное уравнение:

$$\frac{\partial F(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial t} = p(t, x) \left[F(t, x, \tau, \mathscr{E}) - \int\limits_A P(t, x, dA_y) F(t, y, \tau, \mathscr{E}) \right]. \tag{4}$$

Кроме этих уравнений функция $F(t, x, \tau, \mathscr{E})$ очевидно удовлетворяет также условиям:

$$\lim_{\tau \to t_+} F(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E(x, \mathscr{E}), \tag{5}$$

$$\lim_{t \to \tau_-} F(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E(x, \mathscr{E}). \tag{6}$$

Нашей основной задачей является доказательство двух предложений:

I. *При сделанных допущениях вероятности* $F(t, x, \tau, \mathscr{E})$ *однозначно определяются функциями* $p(t, x)$ *и* $P(t, x, \mathscr{E})$.

II. *Если произвольно заданы функции* $p(t, x)$, $P(t, x, \mathscr{E})$, *удовлетворяющие перечисленным выше условиям, то существует случайный процесс* (в смысле цитированной работы А. Н. Колмогорова), *соответствующий заданным* $p(t, x)$ *и* $P(t, x, \mathscr{E})$.

Для доказательства этих предложений достаточно доказать при сделанных допущениях относительно $p(t, x)$ и $P(t, x, \mathscr{E})$, что

1) существует единственное решение $F(t, x, \tau, \mathscr{E})$ уравнения (3) при начальных условиях (5), подчиненное естественным, с вероятностной точки зрения, требованиям $F(t, x, \tau, \mathscr{E}) \geqslant 0$, $F(t, x, \tau, A) = 1$.

2) Это решение удовлетворяет так же уравнениям (1), (2), (4), (6).

§ 2. Чтобы доказать существование решения уравнения (3), удовлетворяющего условию (5), рассмотрим последовательность функций $\varphi_{k,n}(t, x, \tau, \mathscr{E})$ $(-T < t < \tau < T,\ x \subset A,\ \mathscr{E} \subset \mathfrak{M},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$ $n = 0, 1, 2, \ldots)$, определяемых равенствами:

$$\varphi_{0,0} = E(x, \mathscr{E}), \quad \varphi_{k,0} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0,$$

$$\varphi_{k,n+1}(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int\limits_t^\tau d\tau \left[\int\limits_{\mathscr{E}} \varphi_{k,n}(t, x, \tau, dA_y) p(\tau, y) + \right. \\ \left. + \int\limits_A \varphi_{k-1,n}(t, x, \tau, dA_y) p(\tau, y) P(\tau, y, \mathscr{E}) \right]. \tag{7}$$

Применяя метод индукции, легко убедиться, что все функции $\varphi_{k,n}$ непрерывны по t и τ, измеримы по x, вполне аддитивны относительно $\mathscr{E}$ и удовлетворяют оценкам:

$$\varphi_{k,n}=0 \text{ при } k<0 \text{ и при } k>n,$$
$$0\leqslant\varphi_{k,n}\leqslant C_k^n\frac{[K(T)(\tau-t)]^n}{n!} \text{ при } 0\leqslant k\leqslant n.$$

Обозначив через $F(t,x,\tau,\mathscr{E})$ сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\varphi_{k,n}(t,x,\tau,\mathscr{E}),$$

который очевидно абсолютно и равномерно сходится, легко видеть, что функция $F(t,x,\tau,\mathscr{E})$ обладает теми же свойствами, что и функция $\varphi_{k,n}$, причем $\underset{(\mathscr{E})}{\operatorname{var}} F(t,x,\tau,\mathscr{E})\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{k,n}(t,x,\tau,\mathscr{E})\leqslant e^{2K(T)(\tau-t)}$.

Функция $F(t,x,\tau,\mathscr{E})$ и является искомым решением уравнения (3), в чем нетрудно убедиться, умножая обе части формулы (7) на $(-1)^{k+n}$, полагая $k=0,1,2,\ldots$; $n=0,1,2,\ldots$ и суммируя почленно полученные равенства. Очевидно

$$F(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t,x,\tau,\mathscr{E}), \tag{8}$$

где $F_n(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\varphi_{k,n}(t,x,\tau,\mathscr{E})$, откуда

$$F_0(t,x,\tau,\mathscr{E})=E(x,\mathscr{E}),F_{n+1}(t,x,\tau,\mathscr{E})=\int_t^{\tau}d\tau\Big[-\int_{\mathscr{E}}F_n(t,x,\tau,dA_y)\,p(\tau,y)+$$
$$+\int_A F_n(t,x,\tau,dA_y)\,p(\tau,y)\,P(\tau,y,\mathscr{E})\Big]; \tag{8'}$$

$$F(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t,x,\tau,\mathscr{E}), \tag{9}$$

где

$$\psi_k(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\varphi_{k,n}(t,x,\tau,\mathscr{E}),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\psi_0(t,x,\tau,\mathscr{E})&=E(x,\mathscr{E})-\int_t^{\tau}d\tau\int_{\mathscr{E}}\psi_0(t,x,\tau,dA_y)\,p(\tau,y),\\ \psi_k(t,x,\tau,\mathscr{E})&=\int_t^{\tau}d\tau\Big[-\int_{\mathscr{E}}\psi_k(t,x,\tau,dA_y)\,p(\tau,y)+\\ &+\int_A\psi_{k-1}(t,x,\tau,dA_y)\,p(\tau,y)\,P(\tau,y,\mathscr{E})\Big].\end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Из формул (8) и (8′) следует, что $F(t,x,\tau,A)=1$. Из формул же (9) и (9′) можно вывести, к чему мы сейчас и перейдем, что все функции ψ_k и функция $F(t,x,\tau,\mathscr{E})$ неотрицательны. Рассмотрим предварительно уравнение:

$$u(\tau,\mathscr{E})=-\int_t^{\tau}d\tau\int_{\mathscr{E}}u(\tau,dA_y)\,p(\tau,y)+\int_t^{\tau}h(\tau,\mathscr{E})\,d\tau+g(\mathscr{E}), \tag{10}$$

где функции $h(\tau,\mathscr{E})$ и $g(\mathscr{E})$ вполне аддитивны, причем первая из них непрерывна по τ в интервале $|\tau|<T$ и ее вариация на множестве A ограничена в этом интервале. Решение этого уравнения может быть

найдено методом последовательных приближений, но непосредственной проверкой легко обнаружить, что оно дается равенством:

$$u(\tau, \mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} e^{-\int\limits_t^\tau p(s, y)\, ds} H(\tau, dA_y), \tag{11}$$

где

$$H(\tau, \mathscr{E}) = \int\limits_t^\tau d\sigma \int\limits_{\mathscr{E}} e^{\int\limits_t^\sigma p(s, y)\, ds} h(\sigma, dA_y) + g(\mathscr{E}). \tag{11'}$$

При этом следует воспользоваться следующей, легко доказываемой формулой:

$$\int\limits_{\mathscr{E}} \varphi(x) f(x) \Phi(d\mathscr{E}_x) = \int\limits_{\mathscr{E}} \varphi(x) \left[\int\limits_{d\mathscr{E}_x} f(x) \Phi(d\mathscr{E}_x) \right]. \tag{12}$$

Единственность этого решения можно доказать, применяя метод последовательных приближений.

Рассматривая уравнения (9') как частный случай уравнения (10), в силу формул (11) и (11') будем иметь:

$$\psi_0(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E(x, \mathscr{E}) e^{-\int\limits_t^\tau p(s, x)\, ds}, \psi_k(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} H_k(\tau, dA_y) e^{-\int\limits_t^\tau p(s, y)\, ds}, \tag{13}$$

где

$$H_k(\tau, \mathscr{E}) = \int\limits_t^\tau d\sigma \int\limits_{\mathscr{E}_y} e^{\int\limits_t^\sigma p(s, y)\, ds} \int\limits_{A_z} \psi_{k-1}(t, x, \sigma, dA_z)\, p(\sigma, z)\, P(\sigma, z, dA_y), \tag{13'}$$

откуда, действительно, $\psi_k \geqslant 0$, $F \geqslant 0$.

Что полученное решение $F(t, x, \tau, \mathscr{E})$ уравнений (3) и (5) единственно среди решений, удовлетворяющих условиям $F(t, x, \tau, \mathscr{E}) \geqslant 0$, $F(t, x, \tau, A) = 1$, или даже среди всех решений, полная вариация которых по $\mathscr{E}$ ограничена, легко доказать, применяя метод, обычный в аналогичных случаях в теории дифференциальных уравнений. Аналогично легко заключить, что решение $F^\star(t, x, \tau, \mathscr{E})$ уравнения (4), удовлетворяющее условию (6), дается равенством: $F^\star(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \varphi^\star_{k,n}(t, x, \tau, \mathscr{E})$, где $\varphi^\star_{0,0} = E(x, \mathscr{E})$, $\varphi^\star_{k,0} = 0$ при $k \neq 0$,

$$\left.\begin{aligned} \varphi^\star_{k,n+1}(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int\limits_t^\tau dt\, p(t, x) \Big[\varphi^\star_{k,n}(t, x, \tau, \mathscr{E}) + \\ + \int\limits_A P(t, x, dA_y)\, \varphi^\star_{k-1,n}(t, y, \tau, \mathscr{E}) \Big], \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

причем, как и выше, функции $\varphi^\star_{k,n}$ и $F^\star$ непрерывны по t и τ, измеримы по x, вполне аддитивны относительно $\mathscr{E}$ и удовлетворяют оценкам:

$$\varphi^\star_{k,n} = 0 \text{ при } k < 0 \text{ и при } k > n,$$

$$0 \leqslant \varphi^\star_{k,n} \leqslant C_k^n \frac{[K(T)(\tau - t)]^n}{n!} \text{ при } n \geqslant k \geqslant 0,$$

$$\underset{(A)}{\operatorname{var}}\, F^\star(t, x, \tau, \mathscr{E}) \leqslant e^{2K(T)(\tau - t)}.$$

Очевидно

$$F^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E}), \tag{15}$$

где $F_n^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\varphi_{k,n}^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})$, откуда

$$F_0^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=E(x,\mathscr{E}),\ F_{n+1}^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=$$

$$=\int_t^{\tau} dt\, p(t,x)\left[-F_n^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})+\int_A P(t,x,dA_y)F_n^{\star}(t,y,\tau,\mathscr{E})\right]; \tag{15'}$$

$$F^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E}), \tag{16}$$

где $\psi_k^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\varphi_{k,n}^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})$, откуда

$$\psi_0^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=E(x,\mathscr{E})-\int_t^{\tau} dt\, p(t,x)\,\psi_0^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E}),\quad \psi_k^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})=$$

$$=\int_t^{\tau} p(t,x)\,dt\left[-\psi_k^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E})+\int_A P(t,x,dA_y)\,\psi_{k-1}^{\star}(t,y,\tau,\mathscr{E})\right]. \tag{16'}$$

Докажем теперь, что функции F и $F^{\star}$ тождественно равны между собой, причем для них выполняются соотношения (1) и (2). Рассмотрим функциональные операции:

$$L(u)=-u_s'(s,\mathscr{E})-\int_{\mathscr{E}} p(s,z)\,u(s,dA_z)+\int_A p(s,z)\,P(s,z,\mathscr{E})\,u(s,dA_z),$$

$$L^{\star}(v)=v_s'(s,x)-p(s,x)\left[v(s,x)-\int_A P(s,x,dA_z)\,v(s,z)\right],$$

предполагая, что функции $u(s,\mathscr{E})$ и $u_s'(s,\mathscr{E})$ непрерывны по s, вполне аддитивны и имеют равномерно ограниченные вариации относительно $\mathscr{E}$, а функции $v(s,x)$ и $v_s'(s,x)$ непрерывны по s, измеримы по x и ограничены. Тогда будет иметь место формула:

$$\int_{t_1}^{t_2} ds\int_A\left\{v(s,y)\,L[u(s,dA_y)]-L^{\star}[v(s,y)]\,u(s,dA_y)\right\}=$$

$$=\int_A\left[v(t_1,y)\,u(t_1,dA_y)-v(t_2,y)\,u(t_2,dA_y)\right], \tag{17}$$

в чем нетрудно убедиться, заменяя в ней операторы L и $L^{\star}$ их развернутыми выражениями, меняя порядок интегрирования, пользуясь формулой (12) и интегрируя по частям. Полагая в формуле (17) $u(s,\mathscr{E})=F(t,x,s,\mathscr{E})$, $v(s,y)=F^{\star}(s,y,\tau,\mathscr{E})$ и замечая, что $L(F)=L^{\star}(F^{\star})=0$, будем иметь:

$$\int_A F^{\star}(s,y,\tau,\mathscr{E})\,F(t,x,s,dA_y)=\psi(t,x,\tau,\mathscr{E}),\quad \text{где}\quad t<s<\tau.$$

В пределе, при $s\to\tau-$ в одном случае и при $s\to t+$ в другом, последнее равенство дает:

$$\psi(t,x,\tau,\mathscr{E})=\int_A E(y,\mathscr{E})\,F(t,x,\tau,dA_y)=F(t,x,\tau,\mathscr{E}),$$

$$\psi(t,x,\tau,\mathscr{E})=\int_A F^{\star}(t,y,\tau,\mathscr{E})\,E(x,dA_y)=F^{\star}(t,x,\tau,\mathscr{E}),$$

откуда, действительно, функции F и $F^{\star}$ совпадают, причем для них выполняется соотношение (2). Наконец из формул (8) и (8′) легко вывести, что для них имеет место и равенство (1). Теория Feller'а получается как частный случай изложенного, если под множеством A понимать совокупность вещественных чисел, а под семейством $\mathfrak{M}$—измеримые (B) множества. В другом частном случае, когда множество A конечно или счетно, а семейство $\mathfrak{M}$ состоит из всех его подмножеств, можно, полагая $p(t, x_i) = p_i(t)$, $P(t, x_i, x_k) = P_{i,k}(t)$, $F(t, x_i, \tau, x_k) = F_{i,k}(t, \tau)$, изложенные общие результаты формулировать так:

Функции распределения $F_{i,k}(t, \tau)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial F_{i,k}(t, \tau)}{\partial \tau} = -p_k(\tau) F_{i,k}(t, \tau) + \sum_j F_{i,j}(t, \tau) p_j(\tau) P_{j,k}(\tau), \tag{18}$$

$$\frac{\partial F_{i,k}(t, \tau)}{\partial t} = p_i(t) \left[F_{i,k}(t, \tau) - \sum_j F_{j,k}(t, \tau) P_{i,j}(t) \right] \tag{19}$$

и условиям:

$$\lim_{\tau \to t_+} F_{i,k}(t, \tau) = E_{i,k}, \tag{20}$$

$$\lim_{t \to \tau_-} F_{i,k}(t, \tau) = E_{i,k}, \tag{21}$$

где $E_{i,k} = 1$ при $i = k$; $E_{i,k} = 0$ при $i \neq k$.

Как уравнения (18) и условие (20), так и уравнения (19) и условие (21) однозначно определяют функции $F_{i,k}$, удовлетворяющие условиям:

$$F_{i,k} \geqslant 0, \quad \sum_k F_{i,k} = 1, \quad F_{i,k}(t, \tau) = \sum_j F_{i,j}(t, t') F_{j,k}(t', \tau),$$

где $t < t' < \tau$. Эти функции $F_{i,k}$ определяются равенствами:

$$F_{i,k}(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{i,k}^{(n)}(t, \tau), \quad \text{где} \quad F_{i,k}^{(0)}(t, \tau) = E_{i,k},$$

$$F_{i,k}^{(n+1)}(t, \tau) = \int_t^\tau ds \left[-p_k(s) F_{i,k}^{(n)}(t, s) + \sum_j F_{i,j}^{(n)}(t, s) p_j(s) P_{j,k}(s) \right],$$

или

$$F_{i,k}^{(0)}(t, \tau) = E_{i,k} e^{-\int_t^\tau p_i(s)\, ds},$$

$$F_{i,k}^{(n+1)}(t, \tau) = e^{-\int_t^\tau p_k(s) ds} \int_t^\tau d\sigma\, e^{\int_t^\sigma p_k(s) ds} \sum_j F_{i,j}^{(n)}(t, \sigma) p_j(\sigma) P_{j,k}(\sigma),$$

или

$$F_{i,k}^{(0)}(t, \tau) = E_{i,k},$$

$$F_{i,k}^{(n+1)}(t, \tau) = -\int_t^\tau ds\, p_i(s) \left[F_{i,k}^{(n)}(s, \tau) - \sum_j P_{i,j}(s) F_{j,k}^{(n)}(s, \tau) \right],$$

или наконец

$$F_{i,k}^{(0)}(t, \tau) = E_{i,k} e^{-\int_t^\tau p_i(s)\, ds},$$

$$F_{i,k}^{(n+1)}(t, \tau) = e^{-\int_t^\tau p_i(s) ds} \int_t^\tau d\sigma\, e^{\int_t^\sigma p_i(s) ds} p_i(\sigma) \sum_j P_{i,j}(\sigma) F_{j,k}^{(n)}(\sigma, \tau).$$

Поступило
25 III 1938.