Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 6—7

МАТЕМАТИКА

С. Д. РОССИНСКИЙ

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ С СОХРАНЕНИЕМ ЕЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 17 III 1938)

§ 1. В заметке «Об одном случае изгибания прямолинейной конгруэнции с сохранением ее распределительных поверхностей» (1) мной была поставлена общая задача изгибания конгруэнции с сохранением ее распределительных поверхностей и дано ее решение в случае луча конгруэнции, ортогонального соответствующей касательной плоскости изгибающейся поверхности.

В настоящем сообщении изучается тот случай указанной общей задачи, когда луч конгруэнции C лежит в соответствующей касательной плоскости изгибающейся поверхности S.

Допущение произвольного изгибания поверхности S приводит только к развертывающимся поверхностям S, а также к случаям вырождения конгруэнции C, а потому интереса не представляет.

Напротив, рассмотрение непрерывного изгибания поверхности S с сохранением сопряженной системы (случай изгибания на главном основании) приводит к некоторым нетривиальным результатам.

§ 2. Допустим, что поверхность S обладает главным основанием изгибания и отнесем ее к этому основанию.

Если $\bar{\rho}(u, v)$ есть вектор, определяющий поверхность S, а $\bar{n}(u, v)$ — единичный вектор ее нормали, то

$$d\bar{\rho}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и

$$-d\bar{\rho}\, d\bar{n} = Ddu^2 + D''dv^2$$

будут квадрат линейного элемента и вторая квадратичная форма поверхности S.

Обозначим через l длину отрезка, отсекаемого касательными к линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ главного основания поверхности S на луче конгруэнции C, а через $\bar{\zeta}$ — единичный вектор этого луча.

Обозначив через ξ и η отрезки, отсекаемые соответственно на касательных к линиям $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ указанным лучом конгруэнции C, находим, что

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{l}\left(\frac{\eta\bar{\rho}_v}{\sqrt{G}} - \frac{\xi\bar{\rho}_u}{\sqrt{E}}\right) = a\bar{\rho}_u + b\bar{\rho}_v.$$

Исходную поверхность конгруэнции C определим вектором:

$$\bar{\rho}_1(u, v) = \bar{\rho} + \frac{\xi\bar{\rho}_u}{\sqrt{E}} = \bar{\rho} + c\bar{\rho}_u,$$

а ее основные квадратичные формы Kummer'а представим в виде:

$$d\bar{\zeta}^2 = E_0\,du^2 + 2F_0du\,dv + G_0dv^2,$$
$$d\bar{\zeta}d\bar{\rho}_1 = e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Дифференциальное уравнение распределительных поверхностей конгруэнции C

$$[E_0(E_0g - G_0e) - F_0(E_0f + E_0f' - 2F_0e)]\,du^2 +$$
$$+ 2[F_0(E_0g + G_0e) - E_0G_0(f+f)']\,du\,dv +$$
$$+ [G_0(G_0e - E_0g) - F_0(G_0f + G_0f' - 2F_0g)]\,dv^2 = 0$$

в силу уравнения Гаусса

$$DD'' = KH^2,$$

где K—кривизна поверхности S, а $H^2 = EG - F^2$, изобразится в рассматриваемом случае следующим образом:

$$D^8\lambda du^2 + D^6(\lambda_1du^2 + 2\mu_1du\,dv + \nu_1dv^2) + D^4(\lambda_2du^2 + 2\mu_2du\,dv + \nu_2dv^2) +$$
$$+ D^2(\lambda_3du^2 + 2\mu_3du\,dv + \nu_3dv^2) + \nu_4dv^2 = 0,$$

где λ, λ_1, μ_1, ..., ν_4 суть определенные функции величин E, F, G, ξ, η и их производных по u и v. Так как предыдущее уравнение должно выполняться тождественно относительно D, то

$$\lambda du^2 = 0,$$
$$\lambda_1du^2 + 2\mu_1du\,dv + \nu_1dv^2 = 0,$$
$$\lambda_2du^2 + 2\mu_2du\,dv + \nu_2dv^2 = 0,$$
$$\lambda_3du^2 + 2\mu_3du\,dv + \nu_3dv^2 = 0,$$
$$\nu_4dv^2 = 0.$$

Эти последние уравнения должны сводиться к одному, которое и представит собой распределительные поверхности конгруэнции C, сохраняющиеся при изгибании поверхности S.

Отбросим не представляющий интереса случай совпадающих семейств распределительных поверхностей, т. е. примем во всем дальнейшем

$$\lambda = \nu_4 = 0.$$

Оставим в стороне также и тривиальный случай развертывающихся поверхностей S.

Величины λ и ν_4 состоят из ряда множителей, в число которых входят величина a в λ и величина b в ν_4; поэтому в числе всевозможных случаев необходимо рассмотреть те, в которых имеем $a = 0$ или $b = 0$.

§ 3. Случай $a = 0$.

В этом случае при ξ, отличном от нуля, имеем $l = \eta = \infty$. Здесь оказывается, что S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием изгибания с одним семейством геодезических линий ($u = \text{const}$).

Распределительные поверхности конгруэнции C соответствуют сети линий главного основания. Луч конгруэнции C параллелен касательной к геодезической линии $u = \mathrm{const}$ и отсекает на касательной к линии $v = \mathrm{const}$ отрезок, определяемый формулой:

$$\xi = e^{\int \frac{F}{E} \left\{ {11 \atop 2} \right\} du} \left[C(v) - \int \sqrt{E}\, e^{-\int \frac{F}{E} \left\{ {11 \atop 2} \right\} du} du \right],$$

где $C(v)$—произвольная функция от v.

В рассматриваемом случае имеем $F_0 = e = g = 0$, следовательно исходная поверхность конгруэнции C совпадает с ее средней поверхностью. Таким образом средняя поверхность конгруэнции есть геометрическое место точек пересечения лучей конгруэнции C с соответствующими касательными к линиям $v = \mathrm{const}$ главного основания поверхности S. Мы видим, что средняя поверхность конгруэнции C сохраняется при рассматриваемом изгибании поверхности S.

Так как далее

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \left[\frac{HD''}{G\sqrt{G}} \left\{ {12 \atop 1} \right\} \right]^2,$$

а f и f' не зависят от D и D'', то фокусы и граничные точки не сохраняются при изгибании, а сближаются или расходятся на каждом луче.

Заметим наконец, что конгруэнция C не является конгруэнцией нормалей.

Допустим в частности, что поверхность S является произвольной поверхностью Voss'а. В этом случае конгруэнция C строится особенно просто, так как отрезок ξ определяется равенством

$$\xi = -s_v + V(v),$$

где s — дуга геодезической линии $v = \mathrm{const}$, а $V(v)$—произвольная функция от v.

Величина a может обращаться в нуль также и в силу равенства $\xi = 0$; однако это допущение приводит только к конгруэнциям, вырождающимся в цилиндрические ($E_0 G_0 - F_0^2 = 0$).

Случай $b = 0$. Этот случай эквивалентен случаю $\xi = 0$.

§ 4. При a и b, одновременно отличных от нуля, поставленная задача не дает иных решений, кроме тривиальных. Равным образом, особое исследование того случая, когда луч конгруэнции C проходит через точку касания и не совпадает с касательной к линии главного основания, приводит только к тривиальным решениям.

Институт математики.
Московский университет.

Поступило
20 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Россинский, ДАН, XIX, № 4 (1938).