Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. ГРОШЕВ

ТЕОРЕМА О СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 II 1938)

Предлагаемая теорема является обобщением метрической теоремы А. Я. Хинчина (1) о совместной аппроксимации системы вещественных чисел и теоремы автора (2) о линейной форме.

Пусть имеем r систем вещественных чисел с s членами в каждой:

$$\theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots, \theta_{is} \quad (i=1, 2, \ldots, r). \tag{1}$$

Ставится вопрос о метрическом законе совместного приближения к нулю линейных форм:

$$a_1\theta_{i1}+a_2\theta_{i2}+\ldots+a_s\theta_{is}-b_i \quad (i=1, 2, \ldots, r)$$

при неограниченном возрастании целочисленных переменных $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_r$, а именно: каким условиям должна удовлетворять функция $\varphi(t)$ положительного аргумента t, чтобы система неравенств

$$|a_1\theta_{i1}+a_2\theta_{i2}+\ldots+a_s\theta_{is}-b_i|<\varphi(n) \quad (i=1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

где $n=\max|a_k|$ $(k=1, 2, \ldots, s)$, имела почти всюду, т. е. почти во всех точках $(\theta_{11}, \theta_{12}, \ldots, \theta_{rs})$ пространства rs измерений, бесконечное множество решений в целых a_k, b_i? Ответом служит

Т е о р е м а. *Пусть $\varphi(t)$—положительная непрерывная функция положительного аргумента t и при $t\to\infty$ $t^s\{\varphi(t)\}^r\to 0$, причем $t^{s-1}\{\varphi(t)\}^r$ убывает монотонно. Тогда, для того чтобы система неравенства (2) почти для всякой системы чисел (1) имела бесконечное множество решений в целых $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r$, необходимо и достаточно, чтобы интеграл*

$$\int^{\infty} t^{s-1}\{\varphi(t)\}^r\,dt$$

расходился.

В доказательстве автор пользовался методами цитированных работ, но способы получения некоторых оценок второй из них упрощены и обобщены на случай любого числа форм. Именно: в статье (2) требовалось оценить число пересечений внутри единичного куба гиперплоскостей семейства

$$nx_1+a_2x_2+\ldots+a_sx_s-b=0 \tag{3}$$

с гиперплоскостями семейства

$$n'x_1+a_2'x_2+\ldots+a_s'x_s-b'=0, \tag{4}$$

где n и n'—фиксированные целые положительные числа, а остальные параметры a_i, a'_i, b, b' принимают целые положительные значения, удовлетворяющие условиям

$$a_i \leqslant n, \quad a'_i \leqslant n', \quad (b, n) = 1, \quad (b', n') = 1.$$

Эту оценку можно получить так. Сделав ортогональное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$, можно привести уравнения (3) и (4) соответственно к виду:

$$\alpha\xi_1 - b = 0 \quad \text{и} \quad \beta\xi_1 + \gamma\xi_2 - b' = 0.$$

При $\gamma \neq 0$ необходимым условием пересечения плоскостей (3) и (4) внутри единичного куба будет

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 < c, \quad c = c(s) = \text{const}. \tag{5}$$

Выражая ξ_1 и ξ_2 через α, β, γ, а последние через коэффициенты уравнений (3) и (4), из условия (5) получим необходимое условие пересечения:

$$(n'b - nb')^2 < c\gamma^2 (n^2 + a_2^2 + \ldots + a_s^2),$$

а это условие имеет такой же вид, к какому приводился в ([2]) случай $\gamma = 0$.

Этот способ оценки числа пересечений легко обобщается на случай любого числа форм.

Поступило
3 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Khintchine, Math. ZS., **24**, 706 (1926). [2] А. В. Грошев, ИМЕН, Серия матем., № 3, 427 (1937).