Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Л. ПОНТРЯГИН

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПЛЕКСА НА СФЕРУ. I*

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 II 1938)

Как известно, два непрерывных отображения f и g топологического пространства R в n-мерную сферу S_n называются эквивалентными, если отображения эти могут быть переведены одно в другое путем непрерывной деформации. Таким образом все непрерывные отображения пространства R в сферу S_n распадаются на классы эквивалентных. Проблема отыскания этих классов принадлежит к числу наиболее актуальных топологических проблем. Она была полностью решена Hopf'ом для случая, когда R есть n-мерный комплекс K_n. Для случая $R=K_r$, $r>n$, решение проблемы находится в начальной стадии.

В этой и нескольких следующих заметках я публикую ряд своих результатов по вопросу классификации. В настоящей заметке дается полная классификация отображений сферы S_{n+1} в сферу S_n $(n=2, 3, \ldots)$.

Установим прежде всего ряд общих предварительных положений.

Два непрерывных отображения f и g пространства R в сферу S_n будем называть совпадающими для области $V\subset S_n$, если $f^{-1}(V)= =g^{-1}(V)=U\subset R$ и для всякого $x\in U$ имеем $f(x)=g(x)$.

A) Если два непрерывных отображения f и g пространства R в сферу S_n совпадают для некоторой не пустой области $V\subset S_n$, то отображения эти эквивалентны.

B) Пусть V — некоторая шаровая область из S_n, V'—ее граница, F—некоторое замкнутое подмножество нормального пространства R и F'—его граница. Пусть далее f — некоторое непрерывное отображение F в $V+V'$ такое, что $f(F')\subset V'$. Существует тогда непрерывное отображение g пространства R в S_n, совпадающее с f для $V\subset S_n$.

C) Пусть f—симплициальное отображение комплекса K в сферу S_n (S_n здесь предполагается разбитой на симплексы), V—некоторый открытый n-мерный симплекс из S_n и $U=f^{-1}(V)$. Тогда U естественным образом распадается на топологическое произведение симплекса V и некоторого комплекса P, т. е. каждую точку $z\in U$ можно записать в форме (x, y), где $x\in V$, $y\in P$, причем $f(z)=f(x,y)=x$. Если предположить, что K есть многообразие, то и P оказывается многообразием.

Предложения A), B), C) доказываются тривиально.

---

* Теоремы 2′ и 2″ были доложены от моего имени S. Lefschetz'ом на Международном математическом конгрессе в Осло в 1936 г.

Будем рассматривать сферу S_3 как группу кватернионов и обозначим через H однопараметрическую связную подгруппу группы S_3. Тогда, как легко видеть, множество всех правых классов смежности группы S_3 по подгруппе H дает сферу S_2. Получающееся так естественное отображение сферы S_3 на сферу S_2 обозначим через φ.

Отображение f комплекса K на сферу S_n будем называть гомологичным нулю, если каждый n-мерный цикл Z из K по любому модулю m переходит при отображении в нулевой цикл из S_n; $f(Z)=0$.

Лемма. *Пусть f—гомологичное нулю отображение комплекса K в S_2. Существует тогда непрерывное отображение g комплекса K в S_3 такое, что $f=\varphi g$, т. е. для всякого $x \in K$ $f(x)=\varphi[g(x)]$.*

Доказательство опирается на предложение C) и сложную конструкцию, использующую специальные свойства отображений φ.

Мне известен результат Hurewicz'а, согласно которому два отображения g и h комплекса K в S_3 тогда и только тогда эквивалентны, когда отображения φg и φh эквивалентны. Этот результат Hurewicz'а и предыдущая лемма сводят вопрос о классификации гомологичных нулю отображений комплекса K в S_2 к вопросу о классификации всех отображений комплекса K в S_3. Отсюда непосредственно получаем классификацию отображений S_3 в S_2.

Пусть f—симплициальное отображение S_3 в S_2. Возьмем какие-либо две внутренние для симплексов из S_2 точки a и b, тогда $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ суть циклы из S_3. Коэффициент зацепления этих циклов обозначим через $v(f)$. Hopf показал, что $v(f)$ есть инвариант класса отображений. Оказывается, что $v(f)$ есть единственный инвариант, именно мы имеем:

Теорема 1. *Два отображения f и g сферы S_3 в S_2 тогда и только тогда эквивалентны, когда $v(f)=v(g)$.*

Перейдем теперь к рассмотрению случая $n \geqslant 3$.

Теорема 2'. *Существует не более двух классов отображений сферы S_{n+1} в S_n при $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Пусть f—симплициальное отображение S_{n+1} в S_n. Обозначим через V шар с центром a, расположенный в одном из n-мерных симплексов сферы S_n, и положим $U=f^{-1}(V)$. Тогда в силу замечания C) U распадается на топологическое произведение шара V и конечной системы окружностей P. Элементарной реконструкцией отображения f можно добиться того, что P будет просто окружностью. Модифицируя отображенне f еще, мы можем достичь того, что (a, P) будет окружностью из S_{n+1} с непрерывно вращающейся касательной, а (V, y)—перпендикуляром к (a, P), причем отображение f будет изометрично переводить (V, y) на V. Для произвольного второго отображения g сферы S_{n+1} в S_n произведем аналогичную конструкцию. Так как всякие две окружности в S_{n+1} изотопны, то мы можем считать, что для обоих отображений построенные (a, P) и (V, y) совпадают. Так как отображения f и g изометрично отображают (V, y) в V, то мы имеем $f(x,y)=g[\psi_y(x), y]$, где ψ_y есть вращение шара V. Таким образом сравнение двух отображений f и g привело нас к семейству ψ_y вращений n-мерного шара V, причем y пробегает окружность. Так как в многообразии всех вращений шара V имеется лишь два различных гомотопических типа окружностей, то мы видим, что существует не более двух классов отображений.

Сделаем теперь еще одно общее замечание:

D) Всякое непрерывное отображение сферы S_r в сферу S_n можно аппроксимировать аналитическим отображением. Если два аналитических отображения S_r в S_n эквивалентны, то можно дать аналитическую деформацию одного отображения в другое.

Доказательство опирается на аппроксимацию функции нескольких переменных полиномами.

Теорема 2″. *Существует не менее двух классов отображений сферы S_{n+1} в сферу S_n при $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Пусть f—аналитическое отображение S_{n+1} в S_n. Существует тогда такая точка $a \in S_n$, что $P = f^{-1}(a)$ есть конечная система аналитических непересекающихся окружностей в S_{n+1}, число которых обозначим через β. Возьмем в a n ортогональных векторов; в силу отображения f им соответствует в точке $y \in P$ n линейно независимых векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ортогональных к P. К этой системе векторов присоединим вектор u_0, касательный к P в y. Таким образом в каждой точке $y \in P$ определена система U_y из $n+1$ линейно независимых векторов. В каждой точке $z \in S_{n+1}$ возьмем некоторую систему из $n+1$ линейно независимых векторов. Многообразие всех таких систем векторов при произвольной точке z обозначим через M. Легко установить, что одномерная группа Бетти многообразия M есть циклическая, порядка два. Обозначим через Z одномерный цикл из M, не гомологичный в M нулю. Множество всех систем U_y определяет в M цикл, гомологичный в M циклу αZ, где α—вычет по модулю два. Положим $\gamma \equiv \alpha + \beta$ по модулю два. Оказывается, что при аналитической деформации отображения f вычет γ не меняется. Если в течение деформации не наступает критического момента, при котором число β окружностей меняется, то утверждение очевидно, так как тогда множество всех U_y деформируется непрерывно. Критические моменты деформации требуют специального, впрочем вполне элементарного, рассмотрения. Для доказательства теоремы 2″ теперь достаточно установить два отображения, для которых вычет γ имел бы различные значения 0 и 1. Это без труда делается при помощи предложения B).

В следующей заметке будет дана классификация отображений сферы S_{n+2} в сферу S_n.

Математический институт.
Московский государственный университет.

Поступило
4 III 1938.