Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ОДНА ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 III 1938)

Пусть $H(\bar{u})$ — функция векторов $\bar{u}$ во всем трехмерном пространстве, положительно однородная, первой степени. Пусть H — огибающая семейства плоскостей $\bar{u}\bar{x} = H(\bar{u})$. Уравнение этой поверхности в параметрическом виде будет $x_1 = \frac{\partial H}{\partial u_1}$, $x_2 = \frac{\partial H}{\partial u_2}$, $x_3 = \frac{\partial H}{\partial u_3}$. Собственные значения R_1, R_2 второго дифференциала $d^2H(\bar{u})$, взятые для единичных векторов $\bar{u}$, являются главными радиусами кривизны поверхности H. [R_1, R_2 могут быть нулями. Тривиальное нулевое собственное значение $d^2H(\bar{u})$ отбрасывается] (1).

Теорема I. Пусть $f(R_1, R_2; \bar{n})$ кусочно аналитическая функция R_1, R_2 и точки $\bar{n}$ на единичном шаре, определенная в такой области D, что $R_1 \geqslant R_2$. Пусть $\frac{\partial f}{\partial R_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial R_2}$ всюду одного знака. Если существует кусочно аналитическая функция $H(\bar{u})$ с собственными значениями второго дифференциала R_1, R_2, принадлежащими D, такими, что

$$f(R_1, R_2;\ \bar{n}) = g(\bar{n})$$

есть данная функция $\bar{n}$, то такая функция $H(\bar{u})$ единственная, с точностью до линейного слагаемого $\bar{a}\bar{u}$, т. е. соответствующая поверхность H единственная с точностью до параллельного переноса.

Если рассматривать выпуклые функции $H(\bar{u})$ и соответственно замкнутые выпуклые поверхности, определяя область D условиями $R_1 \geqslant R_2 > 0$, то получаем общую теорему единственности для таких поверхностей, охватывающую известные теоремы Минковского и Христофеля об определяемости выпуклых поверхностей заданиями $R_1R_2 = g(\bar{n})$ и $R_1 + R_2 = g(\bar{n})$ (1). Можно указать например, что наша теорема включает также определяемость выпуклой поверхности средней кривизной $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = g(\bar{n})$, факт, бывший установленным только для случая постоянной средней кривизны.

Теорема II. Пусть $f(R_1, R_2; \bar{n})$ удовлетворяет условиям теоремы I. Если функция $H(\bar{u})$ варьируется так, что $\delta f(R_1, R_2; \bar{n}) = 0$, то $\delta H(\bar{u}) = \bar{a}\bar{u}$, т. е. при условии стационарности $f(R_1, R_2; \bar{n})$ поверхность H может претерпевать только бесконечно малый перенос.

Доказательство теоремы II аналогично даваемому далее доказательству теоремы I и даже несколько проще, поэтому мы его приводить не будем.

Доказательство теоремы I. Пусть $H'(\bar{u})$ и $H''(\bar{u})$ две функции, для которых $f(R_1, R_2; \bar{n}) = g(\bar{n})$ одинаковы. Положим

$$H'(\bar{u}) - H''(\bar{u}) = Z(\bar{u}).$$

Покажем, что всюду $d^2 Z(\bar{u}) = 0$ и следовательно $Z(\bar{u}) = \bar{a}\bar{u}$.

Для определенности предположим, что

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}, \frac{\partial f}{\partial R_2} > 0. \tag{1}$$

1. При любом $\bar{u}$ форма $d^2 Z(\bar{u})$ или допускает значения разных знаков или тождественно исчезает.

Из условия (1) видно, что при

$$f(R_1', R_2'; \bar{n}) = f(R_1'', R_2''; \bar{n}) \tag{2}$$

$R_1' - R_1''$ и $R_2' - R_2''$ или разных знаков или одновременно исчезают. Вместе с тем

$$d^2 Z(\bar{u}) = d^2 H'(\bar{u}) - d^2 H''(\bar{u}). \tag{3}$$

Отсюда по известному свойству квадратичных форм, имея в виду смысл R_1 и R_2, убеждаемся в правильности нашего утверждения.

2. Равенство

$$f(R_1, R_2; \bar{n}) = g(\bar{n}) \tag{4}$$

представляет дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для функции $H(\bar{u})$ на шаре, как это ясно из смысла R_1 и R_2. При любом выборе параметров u, v в окрестности всякой точки на шаре уравнение

$$f(R_1, R_2; \bar{n}) = F(H_{uu}, H_{uv}, H_{vv}, H_u, H_v, H; u, v) = g(u, v) \tag{5}$$

разрешимо относительно H.

Примем за переменные $r = |\bar{u}|$ и параметры u, v так, что

$$H(\bar{u}) = rH(u, v). \tag{6}$$

Для единичных векторов $\bar{u} = \bar{n}$, $r = 1$ имеем:

$$d^2 H(\bar{n}) = H_{uu}\,du^2 + 2H_{uv}\,du\,dv + H_{vv}dv^2 + 2(H_u\,du + H_v\,dv)\,dr. \tag{7}$$

Если H_{uu} растет, то собственные значения этой формы не убывают, и хотя бы одно из них растет. Поэтому скажем:

$$\frac{\partial R_1}{\partial H_{uu}} > 0, \ \frac{\partial R_2}{\partial H_{uu}} \geqslant 0, \tag{8}$$

и в силу (1) и (8) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial H_{uu}} = \frac{\partial F}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial H_{uu}} + \frac{\partial F}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial H_{uu}} > 0. \tag{9}$$

Отсюда на основании известной теоремы о неявных функциях получаем, что если для некоторых значений $H_{uu}, H_{uv} \ldots, H, u, v$ уравнение (5) удовлетворено, то в окрестности этих значений его можно писать в форме:

$$H_{uu} = \Phi\,(H_{uv}, H_{vv}, H_u, H_v, H, u, v) \tag{10}$$

и притом единственным образом.

3. Так как по условию H' и H'' кусочно аналитические, то Z так же кусочно аналитическая и в каждой области ее аналитичности $d^2Z = d^2H' - d^2H'' = 0$ или всюду, или на некоторых линиях, или в изолированных точках. (Это основано на известной теореме Вейерштрасса о неявных аналитических функциях.)

Если $d^2Z = 0$ на линии, то $Z(\bar{u}) = \bar{a}\bar{u}$.

Действительно, пусть C — такая линия. Вдоль нее $d^2H' = d^2H''$. Прибавлением к $H''(\bar{u})$ соответствующего слагаемого вида $\bar{c}\bar{u}$ (т. е. переносом поверхности H'') добьемся того, что на C будет $dH' = dH''$ и $H' = H''$. Тогда, на основании пункта 2, выбирая линию C за $u = \text{const}$, имеем, что $H'(u, v)$ и $H''(u, v)$ удовлетворяют вблизи ее одному и тому же уравнению (10) с одинаковыми начальными условиями на линии $u = \text{const}$. По известной теореме Коши в окрестности C

$$H'(u, v) = H''(u, v).$$

Если $d^2Z = 0$ в одной области аналитичности Z, то по доказанному это распространится через границу на соседние области.

4. Остается устранить случай, когда $d^2Z = 0$ только в изолированных точках. Для этого рассмотрим поверхность Z — огибающую семейства плоскостей $\bar{u}\bar{x} = Z(\bar{u})$. Эта поверхность ограничена и следовательно имеет опорные плоскости любого направления. В точках, где $d^2Z(\bar{u}) \neq 0$, она не может иметь опорных плоскостей, так как в этих точках ее радиусы кривизны разных знаков. Опорные плоскости к Z могут проходить только через точки, соответствующие $d^2Z = 0$. Однако мы покажем, что при условии изолированности этих точек через них может проходить не более чем по одной опорной плоскости, что противоречит наличию у Z опорных плоскостей любого направления.

5. Пусть $\bar{n}_0$ — точка на единичном шаре, где $d^2Z(\bar{n}_0) = 0$, пусть O — точка на поверхности Z, соответствующая $\bar{n}_0$, и пусть S — кусок поверхности Z, соответствующий окрестности точки $\bar{n}_0$, не содержащей других точек, где $d^2Z(\bar{n}) = 0$. Проведем через O плоскость E_0 с нормалью $\bar{n}_0$. Возьмем прямую a, не параллельную ни одной из плоскостей со сферическими образами в $U(\bar{n}_0)$ и проходящую через любую точку на S, отличную от O. Легко видеть, что такая точка найдется.

Будем перемещать a параллельно так, чтобы точка пересечения ее с E_0 описывала окружность C вокруг O.

Прямая a может перестать пересекать S, только пройдя через границу S, так как у S нет касательных, параллельных a. Если бы это наступало при сколь угодно малой окружности C и при любой окрестности $U(\bar{n}_0)$, заключающейся в исходной, то сама точка O при всех таких $U(\bar{n}_0)$ была бы проекцией точек границы, соответствующих S на E_0 в направлении a. Тогда S содержала бы прямолинейный отрезок в направлении a, с концом в O, т. е. вопреки предположению S имела бы касательные плоскости, параллельные a. Следовательно при достаточно малой окружности C a не перестает пересекать S. Поэтому всякая плоскость, параллельная a и проходящая через O, пересекает S. Принимая во внимание, что окрестность $U(\bar{n}_0)$ может быть сколь угодно малой, убеждаемся, что через O не может проходить опорная плоскость к S, отличная от E_0.

Можно даже показать, что вследствие отрицательности кривизны поверхности S всюду, кроме точки O, и плоскость E_0 так же ее пересекает, т. е. не является опорной.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
9 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bonnesen u. Fenchel, Theorie der konvexen Körper (1937), § 8; Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 94 и 95.