Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. ЛУЗИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ ГЛАВНОГО ОСНОВАНИЯ III, IV

3. Строение уравнений, определяющих главные основания. Мы отсылаем читателя к нашим предыдущим сообщениям. Уравнение (I), $\Phi=0$, не содержит производных функции ψ; оно содержит вторые производные функции φ заключенными в члене $\Delta_\varphi\Delta_\varphi\varphi$; оно содержит третьи производные функций E, F, G заключенными в члене $\Delta_\varphi K$. Уравнение (III), $\Phi_2=0$, имеет точно такое же строение: здесь только функции φ и ψ меняются ролями. Уравнение (II), $\Phi_1=0$, содержит вторые производные функций φ и ψ заключенными в разности $\Delta_\psi\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\Delta_\varphi\psi$, так как согласно формуле (10) разность $\Delta_g\Delta_f z-\Delta_f\Delta_g z$ содержит только производные первого порядка функции z; наконец оно содержит четвертые производные функций E, F, G заключенными в сумме $\Delta_\varphi\Delta_\psi K+\Delta_\psi\Delta_\varphi K$.

Но очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}\Delta_\varphi\Delta_\varphi\varphi&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\varphi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\ldots;\\ \Delta_\psi\Delta_\psi\psi&=\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+2\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\psi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\ldots,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Delta_\psi\Delta_\psi\varphi-\Delta_\varphi\Delta_\varphi\psi&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+2\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\psi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\\ &-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+2\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}+\varphi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)+\ldots,\\ K&=M\cdot\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)+\ldots,\end{aligned}\tag{12}$$

где $M=-1/2\sqrt{EG-F^2}$ и где мы удерживаем лишь производные второго порядка. Следовательно, если мы будем сохранять лишь старшие производные, опуская из них смешанные производные, то получим

$$\Delta_\varphi\Delta_\psi K+\Delta_\psi\Delta_\varphi K=2M\cdot\left(\frac{\partial^4 E}{\partial v^4}+\varphi\psi\frac{\partial^4 G}{\partial u^4}\right)+\ldots\tag{13}$$

4. Решение поставленных проблем. Три соотношения $\Phi=0$, $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$, которым подчинены две функции φ и ψ, можно рассматривать, как систему $(\sum)$ трех уравнений с частными производными, определяющую три неизвестные функции: φ, ψ и одну из функций E, F и G, взятую по желанию. Этого замечания, высказанного С. П. Финиковым, достаточно, чтобы провести со всей

строгостью доказательство существования аналитических поверхностей S, не имеющих главного основания. В самом деле, возьмем за неизвестные функции φ, ψ и E и будем рассматривать функции F и G как данные нам. Если мы внесем эти величины функций F и G в уравнения:

$$\Phi=0, \ \Phi_1=0, \ \Phi_2=0 \qquad (\sum)$$

и если мы заметим, что система уравнений $(\sum)$, рассматриваемая, как определяющая неизвестные функции φ, ψ и E в силу формул (11), (12) и (13), немедленно приводится к нормальной форме Коши-Ковалевской:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\Phi^*, \quad \frac{\partial^4 E}{\partial v^4}=\Phi_1^*, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=\Phi_2^*, \qquad (\sum^*)$$

то тогда на основании теоремы, доказанной нами в недавнем сообщении [ДАН, XVIII, № 8 (1938)], можно отыскать такой многочлен $P(u, v)$ от букв u, v с целыми коэффициентами, что будем иметь строгое неравенство $|E-P(u, v)|>0$ внутри всякой области D, лежащей в плоскости u, v, причем это неравенство будет справедливым при любых функциях φ, ψ и E, удовлетворяющих системе $(\sum)$. Отсюда мы немедленно заключаем, что если вставим в уравнения $\Phi=0$, $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$ вместо буквы E многочлен $P(u, v)$, то полученная таким образом система $(\sum)$ трех уравнений не может быть удовлетворена никакими двумя аналитическими функциями φ и ψ. Это есть случай заведомой несовместности уравнений $\Phi=0$, $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$.

Таким образом мы приходим к следующему предложению, строго доказанному:

Теорема I. *Для любых заданных функций $F(u, v)$ и $G(u, v)$ двух независимых переменных u, v можно всегда отыскать такой многочлен $E(u, v)$ от букв u, v с целыми коэффициентами, что всякая аналитическая поверхность S, имеющая форму $ds^2=E\,du^2+2F du\,dv+G\,dv^2$ своим линейным элементом, есть поверхность, лишенная главного основания.*

Для того чтобы узнать, не имеется ли таких алгебраических поверхностей, необходимо войти в некоторые детали рассуждения, сделанного в нашем указанном сообщении. Прежде всего важно заметить, что находящаяся там функция $\mathfrak{F}(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ была получена путем алгебраического исключения. Отсюда следует, что в рассматриваемом здесь случае системы $(\sum^*)$ функция $\mathfrak{F}(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_s$, голоморфная и нетождественная нулю, зависит аналитически от букв F и G и их частных производных до известного порядка p, причем никакие другие буквы, ни параметры, ни переменные не войдут в $\mathfrak{F}$. С другой стороны, если мы заменим переменные $t_1, t_2, \ldots, t_s$ определенными частными производными $\frac{\partial^{k_1}E}{\partial v^{k_1}}$, $\frac{\partial^{k_2}E}{\partial v^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_s}E}{\partial v^{k_s}}$ функции E, удовлетворяющей системе $(\sum^*)$, взятыми по независимому переменному v, то мы должны получить выражение, тождественное нулю.

Заметив это, возьмем в качестве функций $F(u, v)$ и $G(u, v)$ какие-нибудь многочлены от букв u, v, которые будем считать данными нам многочленами. Мы начнем с того, что согласно теореме указанного сообщения отыщем многочлен E от букв u, v такой, что выражение $\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^{k_1}E}{\partial v^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2}E}{\partial v^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_s}E}{\partial v^{k_s}}\right)$ будет голоморфным и отличным от нуля в точке $u=u^0$, $v=v^0$. Но известно, что система трех уравнений с частными производными

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \tag{14}$$

содержащая прямоугольные координаты x, y, z точки поверхности S, рассматриваемые как неизвестные функции, имеет решение $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, голоморфное в точке $u=u^0$, $v=v^0$. Следовательно если разложения Тейлора функций x, y, z остановить на членах достаточно высокого порядка m, мы получим такие три многочлена $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$ от букв u, v, что когда мы заменим в выражении $\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^{k_1}E}{\partial v^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2}E}{\partial v^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_s}E}{\partial v^{k_s}}\right)$ буквы E, F, G их выражениями через прямоугольные координаты x, y, z по формулам (14), а затем буквы x, y, z заменим соответственно многочленами $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$, то полученное выражение $\mathfrak{F}$ будет продолжать оставаться голоморфным и отличным от нуля в точке u^0, v^0*. Отсюда немедленно следует, что поверхность S, определенная уравнениями:

$$x=P(u, v),\quad y=Q(u, v),\quad z=R(u, v),$$

есть алгебраическая и не имеющая главного основания.

Итак, мы можем пополнить предыдущее предложение следующим образом:

Теорема II. *Можно найти такие три многочлена* $P(u, v)$, $Q(u, v)$, $R(u, v)$ *от букв* u, v, *что алгебраическая поверхность* S, *определенная тремя уравнениями* $x=P(u, v)$, $y=Q(u, v)$, $z=R(u, v)$, *есть поверхность без главного основания***.

Для того чтобы пойти дальше, возвратимся к системе $(\sum)$ уравнений $\Phi=0$, $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$, рассматриваемых, как определяющие неизвестные функции φ и ψ. Здесь мы считаем функции E, F и G данными нам. Вот теперь точные аналитические факты, относящиеся к этой системе***:

1) всякая частная производная функции φ и функции ψ может быть выражена рациональным образом только через двенадцать количеств:

$$\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3},\ \psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial\psi}{\partial v},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v},\ \frac{\partial^3\psi}{\partial u^3},\ \frac{\partial^4\psi}{\partial u^4},$$

рассматриваемых как независимые переменные (данные функции E, F, G и их частные производные сюда могут входить);

---

* Легко узнать здесь принцип непрерывности, примененный законным образом.

** После того, как это было нами написано, С. П. Фиников указал другой путь для доказательства этого предложения. Его метод, также отправляющийся от указанной теоремы теории уравнений с частными производными, в дальнейшем делает употребление формул, данных Гауссом и Дарбу ([1]).

*** Заметим, что можно рассматривать эти аналитические факты, относящиеся здесь собственно лишь к частной системе (Σ), как вытекающие из одного общего предложения, относительно систем уравнений с частными производными. Доказательство этого предложения слишком длинно, чтобы быть помещенным здесь.

2) общее решение φ, ψ системы ($\sum$) (если эта система допускает решения) может быть написано в виде:

$$\varphi = H(u, v, C_1, C_2, \ldots, C_{12}),$$
$$\psi = H_1(u, v, C_1, C_2, \ldots, C_{12}),$$

где H и H_1 обозначают две аналитические функции двух независимых переменных u, v и двенадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$, из которых одни могут зависеть от других.

С другой стороны, определение количества $X = x^2$ (см. наше предшествующее сообщение) зависит от вполне интегрируемой системы

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A_0X^2 + A_1X + A_2, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = B_0X^2 + B_1X + B_2, \tag{7}$$

где все A и B суть дифференциальные выражения, зависящие лишь от букв $E, F, G, \varphi, \psi, a, b$ и их частных производных. Здесь две функции a и b связаны соотношением (6): $ab = K / (\psi - \varphi)^2$, и мы, не ограничивая нисколько общности рассуждений, имеем право положить $a = b = \sqrt{K} / (\psi - \varphi)$. Применяя метод Майера к системе (7), мы приходим к одному и только одному уравнению Риккати:

$$\frac{dX}{du} = (A_0^* + \lambda B_0^*) X^2 + (A_1^* + \lambda B_1^*) X + (A_2^* + \lambda B_2^*), \tag{15}$$

где через A^* и B^* обозначен результат замены в соответствующих A и B буквы v через λu, λ здесь есть параметр. Общее решение X уравнения Риккати (15), $X = C\alpha + \beta / C\gamma + 1$, в котором следует параметр λ заменить опять на v / u, есть аналитическая функция двух независимых переменных u, v и тринадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C$. Аналогичное заключение нужно сделать и для первого коэффициента δ второй квадратичной формы $\delta\, du^2 + 2\delta' du\, dv + \delta'' dv^2$ поверхности S, имеющей данную форму $ds^2 = E\, du^2 + 2F du\, dv + G\, dv^2$ своим линейным элементом и наверное допускающей главное основание, так как, следуя формуле (5), мы имеем $\delta = ax + b / x$, где $x^2 = X$ и где $a = b = \sqrt{K} / (\psi - \varphi)$. Значит, если мы положим $v = v^0$, δ становится вполне определенной аналитической функцией лишь одного независимого переменного u и тринадцати параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C$:

$$\delta = \omega(u, C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C). \tag{16}$$

Но никакая определенная аналитическая функция $A[z, C', C'', \ldots, C^{(k)}]$ одного независимого переменного z и произвольных параметров $C', C'', \ldots$, находящихся в конечном числе k, не может никогда пробегать всех возможных аналитических функций $f(z)$ переменного z, когда параметры $C', C'', \ldots$ заставляют принимать, один независимо от другого, всевозможные численные значения. Это есть общий аналитический факт, отнюдь не являющийся прямым следствием диагонального процесса Кантора (если $k > 1$), но проистекающий из того обстоятельства, что коэффициенты разложения Тейлора:

$$A[z, C', C'', \ldots, C^{(k)}] = A_0 + \frac{A_1}{1!}(z - z_0) +$$
$$+ \frac{A_2}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{A_n}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

суть вполне определенные аналитические функции параметров $C', C'', \ldots$ Отсюда следует, что все коэффициенты A_i суть вполне определенные аналитические функции ограниченного числа их ($\leqslant k$) и, значит, не могут быть выбраны произвольно. Бесконечность аналитических функций $f(z)$, не изображающихся формулой $A[z, C', C'', \ldots, C^{(k)}]$, есть бесконечность, зависящая от произвольной аналитической функции одного переменного.

Возвращаясь к равенству (16), мы видим, что имеется бесконечность аналитических функций $\Omega(z)$, заведомо не изображаемых формулой $\omega(u, C_1, C_2, \ldots, C_{12}, C)$, причем эта бесконечность зависит от произвольной функции одного независимого переменного.

Но, с другой стороны, единственными связями, налагаемыми на коэффициенты $\delta, \delta', \delta''$ второй квадратичной формы, являются: два уравнения с частными производными Кодацци:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta}{\partial v}-\frac{\partial\delta'}{\partial u}+p\delta+p'\delta'+p''\delta''=0,\\ &\frac{\partial\delta''}{\partial u}-\frac{\partial\delta'}{\partial v}+q\delta+q'\delta'+q''\delta''=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и конечное уравнение Гаусса

$$\delta\delta''-\delta'^2=K. \tag{3}$$

И так как уравнения (2) Кодацци, рассматриваемые, как определяющие неизвестные функции δ и δ', $\delta''=(K+\delta'^2)/\delta$, имеют нормальную форму Коши-Ковалевской, то всякая поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, имеющая $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ своим линейным элементом, вполне определена знанием двух аналитических функций одного независимого переменного, $\delta(u, v^0)$ и $\delta'(u, v^0)$, выбираемых произвольно. Мы заключаем отсюда, что поверхность S, для которой $\delta(u, v^0)=\Omega(u)$, не может допускать никакого главного основания.

Таким образом мы приходим к следующему предложению.

Теорема III. *Для всякой данной аналитической не развертывающейся поверхности S имеется бесконечность, зависящая от двух произвольных функций одного переменного, аналитических поверхностей S', наложимых на S и не имеющих никакого главного основания.*

Иначе говоря, «почти все» аналитические не развертывающиеся поверхности S, принадлежащие данному линейному элементу ds, лишены главного основания.

Как немедленное следствие доказанной теоремы мы получаем предложение:

существует бесконечно много аналитических поверхностей постоянной кривизны (произвольной ненулевой), не имеющих никакого главного основания.

Это геометрическое предложение очевидно противоположно тому, ставшему классическим[2] предложению, которое гласит: всякая аналитическая минимальная поверхность имеет главное основание.

Заключение. Задача изгибания на главном основании постоянно привлекала внимание московских геометров с момента опубликования работ Карла Михайловича Петерсона (1866 г.), причем самая проблема общности этого изгибания оставалась неразрешенной. Мы доказали строго, что поверхности, допускающие главное основание, образуют весьма узкое семейство. Это обстоятельство нисколько не умаляет важности относящихся сюда исследований: достаточно упомянуть, что конические сечения, имеющие столь большое значение, составляют лишь незначительную часть всех плоских кривых.

После доказанного ясно, что существование главного основания есть геометрический феномен весьма редкий. Можно думать, что это существование связано с самою пространственною **ф о р м о й** рассматриваемой поверхности. Достаточно вероятно, что если какая-нибудь аналитическая поверхность S лишена главного основания, то и всякая другая аналитическая поверхность S', достаточно «близкая» к поверхности S, будет также лишена его.

5. Н е о б х о д и м ы е и д о с т а т о ч н ы е у с л о в и я. Но проблемами, несравнимо более трудными, являются следующие:

П р о б л е м а 1. *Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы* данный линейный элемент $ds^2 = Edu^2 + 2\,Fdudv + Gdv^2$ *имел главное основание.*

П р о б л е м а 2. *Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы* данная поверхность $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ *имела главное основание.*

В п е р в о м с л у ч а е речь идет о существовании и фактическом получении полной системы результантов $R\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = 0$, $R_1 = 0, \ldots$, которую претендуют иметь, производя «исключения» функций φ и ψ между тремя уравнениями с частными производными: $\Phi = 0$ (I), $\Phi_1 = 0$ (II), $\Phi_2 = 0$ (III).

В о в т о р о м с л у ч а е речь идет об аналогичной системе результантов $R\left(E, F, G, \delta, \delta', \delta'', \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial \delta}{\partial u}, \ldots\right) = 0, R_1 = 0, \ldots$, которую имеют в виду получить, выполняя «исключение» функций φ и ψ между уравнениями: $\Phi = 0$ (I), $\Phi_2 = 0$ (III) и конечным уравнением $\delta\varphi\psi + \delta'(\varphi + \psi) + \delta'' = 0$ (4).

Повидимому вошло в обычай рассматривать обе эти проблемы, как превышающие возможности современного анализа благодаря очевидной сложности уравнений, определяющих главные основания.

В дальнейшем мы вернемся к этим проблемам.

Поступило
21 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D a r b o u x, Leçons sur la théorie des surfaces, III, 251—255. [2] P e t e r s o n, Ueber Curven und Flächen (1868).