Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

ФИЗИКА

Г. МАНДЕЛЬ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА БОРНА И КОСМОЛОГИЯ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 2 II 1938)

I. Пятимерная единая теория поля дает геометрическое обоснование классической максвелловой электродинамики. При этом рассматривается пятимерное цилиндрическое пространство $\overset{\circ}{R}_5$, т. е. такое, в котором существует поле единичного вектора $\overset{\circ}{X}{}^i$, удовлетворяющее

$$\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{X}_k + \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{X}_i = 0. \tag{1}$$

Предложенная Борном обобщенная нелинейная электродинамика представляет в своей первоначальной форме также вполне классическую (т. е. неквантовую) теорию, поэтому можно пытаться распространить идею геометрического обоснования в рамках пятимерной теории на новую электродинамику Борна *.

Приняв вместе с Борном, что лагранжева функция поля имеет вид квадратного корня ** $\sqrt{I}$, обратим внимание на вид подкоренного выражения, предложенного Борном. Оно представляет инвариант I, составляемый из тензора

$$F_{ik} = 2^{-\frac{1}{2}} b g_{ik} + \mathfrak{M}_{ik} \tag{2}$$

(где b—абсолютное поле, $\mathfrak{M}_{ik}$—тензор электромагнитного поля), как квадрат его:

$$I = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3}$$

(или в другом варианте, как определитель $|F_{ik}|$). Тензор F_{ik} отличается от $\mathfrak{M}_{ik}$ наличием симметричной (скалярной) части; поэтому (3)

* Мы здесь принимаем электродинамику Борна как нечто данное, несмотря на то, что по нашему мнению теория Борна в качестве классической (неквантовой) теории едва ли обладает физическим смыслом. Мы полагаем однако, что при определенных частных условиях она может рассматриваться как упрощенное изложение известных электродинамических следствий теории позитрона.

** Наше рассмотрение относится одинаковым образом и к другим вариантам лагранжевой функции, предложенным Инфельдом [см. L. Infeld, Cambridge Proc., **33**, I, 70 (1937)].

отличается от удвоенной лагранжевой функции максвелловой электродинамики $\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{\alpha\beta}\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$.

Геометрическое истолкование в случае максвеллового поля было основано на отождествлении:

$$\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{X}_k = \frac{\sqrt{\varkappa}}{2}\mathfrak{M}_{ik}\ * \tag{4}$$

(поэтому требовалось $\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{X}_k = -\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{X}_i$—условие цилиндричности). Для того чтобы дать геометрическое истолкование нелинейной электродинамике Борна, нужно было бы геометрически ввести аналогичным способом основной тензор теории Борна F_{ik}.

Для этого построим такое пятимерное пространство R_5, в котором существует поле единичного вектора X^i, удовлетворяющее

$$\nabla_i X_k + \nabla_k X_i = g_{ik}\cdot \mathrm{skalar} \tag{5}$$

вместо (1). После чего полагаем:

$$\overline{\nabla_i X_k} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{2} F_{ik}\sigma\ **. \tag{6}$$

Здесь σ представляет скалярный множитель, смысл которого выяснится в дальнейшем; при переходе к четырехмерным формулам можно будет положить $\sigma = 1$. Условие цилиндричности (1) означало неизменность метрики $\overset{\circ}{g}_{ik}$ вдоль $\overset{\circ}{X}{}^i$ в $\overset{\circ}{R}_5$. Геометрический смысл более общего условия (5) заключается в конформном изменении метрики g_{ik} вдоль X^i в R_5 ***:

$$X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{ik} = 2\rho g_{ik}. \tag{7}$$

II. В настоящей работе мы исходим из прежнего положения цилиндрической теории о том, что не следует выделять одной какой-нибудь (неголономной) гиперповерхности пятимерного пространства, рассматривая ее как четырехмерный мир Минковского, и что, наоборот, мы «непосредственно воспринимаем» все перпендикулярные к X^i гиперповерхности сразу. Любая из них может рассматриваться как четырехмерный мир, но тогда следует очевидно отказаться от отождествления метрики g_{ik} нашего нецилиндрического R_5 с метрикой нашего мира $\overset{\circ}{g}_{ik}$. Непосредственным физическим смыслом (гравитационных потенциалов и т. п.) могут обладать лишь отношения этих g_{ik}, например $\frac{g_{ik}}{g_{55}}$. Если отождествить $dx^i\ (i = 1, \ldots, 4)$ с обычными дифференциалами четырехмерных координат (что проще всего), то, значит, единица длины в R_5 отличается от единицы длины мира Минковского (от 1 см) множите-

---

* $\varkappa = \frac{4K}{c^4}$, где K—ньютонова постоянная тяготения.

** Черта над тензором означает проекцию его перпендикулярно к X^i. F_{ik} здесь четырехмерный тензор, как и g_{ik} (в дальнейших формулах g_{ik} пятимерное).

*** Об инфинитезимальном конформном преобразовании метрики см. J. Schouten, Der Ricci-Kalkül, стр. 168 и 211; ср. H. Mandel, ZS. f. Phys., **54**, 564 (1929).

лем σ, который, представляя, вообще говоря, любую (непрерывную) функцию координат, меняется вдоль X^i. Поэтому мы пишем:

$$ds = \sigma \overset{\circ}{ds}; \quad g_{ik} = \sigma^2 \overset{\circ}{g}_{ik}, \tag{8}$$

где ds—элемент длины в R_5, а $\overset{\circ}{ds}$—элемент длины, измеренный в сантиметрах. Мы заключаем, что и другие тензоры нашего R_5, получающие в дальнейшем смысл физических величин, также должны изменяться конформно в направлении X^i. Полагая $\sigma(x^1 \ldots x^5) = 1$, мы задаем ту гиперповерхность в R_5, для которой единица длины совпадает с сантиметром. В прежнем цилиндрическом пространстве $\overset{\circ}{R}_5$ этот множитель был тождественно равен единице. Пятимерное пространство R_5 электродинамики Борна [определяемое (5)] не имеет поэтому столь наглядного истолкования, как пятимерное цилиндрическое пространство электродинамики Максвелла.

При этих сравнениях мы имели в виду только такие элементы длины, которые расположены в R_5 перпендикулярно к X^i (т. е. имеют направление, вполне лежащее в нашем мире). Что же касается длины ds, имеющей направление X^i, $ds^i = dsX^i$, то вообще нет возможности непосредственно сравнивать ее с четырехмерной длиной. Выбор единицы длины в этом направлении можно было бы обосновать, лишь исходя из каких-либо физических положений теории, и пока в этом отношении пространство R_5 остается еще неопределенным.

III. Здесь необходимо отметить, что такая же неопределенность должна иметь место и в прежней теории для цилиндрического пространства $\overset{\circ}{R}_5$. В самом деле, если это последнее подвергнуть сжатию вдоль $\overset{\circ}{X}{}^i$ в a раз:

$$\overset{\circ}{X}{}'^i = a\overset{\circ}{X}{}^i, \quad \overset{\circ}{X}{}'_i = a^{-1}\overset{\circ}{X}_i, \tag{9}$$

то ничто не должно измениться в четырехмерных физических законах. Законы единой теории для максвеллового поля должны обладать инвариантностью по отношению к преобразованиям (9) (a-преобразованиям). В наших прежних (и других) работах не было обращено внимания на соблюдение упомянутой инвариантности, что выражалось в том, что вектор, при помощи которого производится проектирование пятимерных тензоров на четырехмерный мир, предполагался единичным вектором в $\overset{\circ}{R}_5$ (т. е. имеющим длину в 1 см). Необоснованность такого предположения вытекает из идеи инвариантности по отношению к a-преобразованиям, т. е. связана с произвольностью выбора единицы длины в направлении $\overset{\circ}{X}{}^i$ и $\overset{\circ}{R}_5$.

Перейдем преобразованием (9) от прежнего цилиндрического $\overset{\circ}{R}_5$ к такому новому цилиндрическому $\overset{\circ}{R}{}'_5$, в котором проектирующий вектор $V'^i \equiv \overset{\circ}{X}{}^i = \frac{1}{a}\overset{\circ}{X}{}'^i$ имеет длину a^{-1} см (где a — пока произвольный параметр); $\overset{\circ}{X}{}'^i$—здесь единичный вектор в новом полученном пространстве $\overset{\circ}{R}{}'_5$. Однако при этом преобразовании меняется тангенс угла Θ наклона с $\overset{\circ}{X}{}^i$:

$$\operatorname{cth} \overset{\circ}{\Theta} = \frac{Y_\alpha \overset{\circ}{X}{}^\alpha}{|Y|} = \frac{e}{mc^2 \sqrt{\varkappa}}, \ *$$

---

* См. наше изложение пятимерной теории для максвеллова поля, Уч. записки ЛГУ, вып. 2, 85 (1936). Мы пользуемся здесь обозначениями этой статьи.

геодезической линии, представляющей пятимерную траекторию тела с массой m и зарядом e. В новом пространстве $\mathring{R}_5'$ получим:

$$\operatorname{cth}\Theta' = \frac{Y_\alpha \mathring{X}'^\alpha}{|Y|} = a\frac{Y_\alpha \mathring{X}^\alpha}{|Y|} = a \operatorname{cth}\mathring{\Theta} = \frac{ae}{mc^2\sqrt{\varkappa}}. \tag{10}$$

Уравнение движения — уравнение геодезической в $\mathring{R}_5$ — представит уравнение геодезической также и в $\mathring{R}_5'$, если задать в $\mathring{R}_5'$ вектор скорости нижними составляющими $Y_i\,(i=1,\ldots,5)$; пользуясь обычной специальной Z-координатной системой, в которой $\mathring{X}^i=0$, $i=1,\ldots,4$, мы будем иметь тогда в ней, что и $Y^i\,(i=1,\ldots,4)$ одинаковы в обоих пространствах $\mathring{R}_5$ и $\mathring{R}_5'$ и отличаются лишь Y^5. То же будет относиться и к волновому уравнению, так как $\nabla_i\,(i=1,\ldots,5)$ предполагается в нем одним и тем же в $\mathring{R}_5$ и в $\mathring{R}_5'$.

Пользуясь (10), мы можем выбрать из всех возможных $\mathring{R}_5'$ такое $\mathring{R}_5^I$, в котором для электрона мировая линия была бы нулевой, т. е. $\operatorname{cth}\Theta^I$ был бы для него равен единице *. Этим естественным (пока лишь геометрическим, но не физическим) требованием фиксируется значение $a_I=\frac{m_0c^2\sqrt{\varkappa}}{e_0}$, гда e_0 и m_0—заряд и масса электрона. Этим же требованием мы теперь определим единицу (сантиметр) длины вдоль $\mathring{X}^i$ **. Из (9) мы найдем тогда, что длина проектирующего вектора $V^i\equiv\mathring{X}^i=a^{-1}\mathring{X}'^i$ будет в $\mathring{R}_5^I$ равна $a_I^{-1}=\frac{e_0}{m_0c^2\sqrt{\varkappa}}$ см и представляет некоторую естественную длину в $\mathring{R}_5^I$. (Такая длина считалась в $\mathring{R}_5$ равной единице; следовательно в $\mathring{R}_5$ длины, имеющие направление $\mathring{X}^i$, измерялись в естественных единицах, равных $\frac{e_0}{m_0c^2\sqrt{\varkappa}}$ сантиметров.)

IV. После этих предварительных замечаний геометрического характера вернемся к тензору F_{ik} теория Борна; исследование этого тензора приводит к новым заключениям о свойствах пространства R_5 теории Борна, а также нашего четырехмерного мира. Введем в (6) $g_{ik}=\sigma^2\mathring{g}_{ik}$. При $\sigma=1$ компоненты вектора X_i должны принять те же значения, что и в теории цилиндрического пространства; поэтому мы полагаем: $X_i=\sigma\mathring{X}_i=\sigma\sqrt{\varkappa}\Phi_i$ (Φ_i—вектор-потенциал). Из (6) следует тогда

$$2\overline{\nabla_i X_k}=\sigma\varkappa^{+\frac{1}{2}}(2\varkappa^{-\frac{1}{2}}\rho\sigma\mathring{g}_{ik}+\mathfrak{M}_{ik}). \tag{11}$$

* Волновое уравнение электрона тогда имело бы вид:

$$\sum_{\mu=1}^{5}\mathring{X}^{I\nu}_{\mu}\alpha_{\mu}\nabla_\nu\psi=0.$$

** В случае цилиндрического пространства, строго говоря, такой выбор единицы столь же произволен, как и тот, которым пользовались прежде (рассматривая $\mathring{R}_5$). Мы однако на нем остановились, так как оно приводит к правильным соотношениям в космологических следствиях пятимерного пространства теории Борна, где, как видно из дальнейшего, инвариантность к a-преобразованиям не имеет места.

Сравнивая с F_{ik}, находим $2\varkappa^{-\frac{1}{2}}\rho\sigma = 2^{-\frac{1}{2}}b = \text{const}$; отсюда получаем:

$$\rho\sigma = X^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\sigma = \frac{d\sigma}{dl} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\sqrt{2}}b; \quad \sigma = \frac{\sqrt{\varkappa}}{2\sqrt{2}}bl + \sigma_1. \tag{12}$$

Если бы существовали гиперповерхности, ортогональные к X^i, то, как известно, тензор $\overline{\nabla_i X_k}$ являлся бы вторым фундаментальным тензором и ρ представляло бы постоянную скалярную гауссову кривизну таких гиперповерхностей. В нашем случае ρ можно назвать гауссовой кривизной неголономных гиперповерхностей, ортогональных к X^i. Мы видим что она меняется вдоль X^i обратно σ. Если в (12) пренебречь σ_1*, мы получаем возможность наглядно представить наше семейство гиперповерхностей в виде семейства концентрических четырехмерных сфер в R_5. Кривизну сферы, для которой $\sigma = 1$, можно приравнять кривизне мира Минковского. Однако вычисление производилось здесь в пространстве R_5, где единичным вектором является X^i, длина которого вследствие $g_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta} = g^{\alpha\beta}X_{\alpha}X_{\beta} = \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\overset{\circ}{X}_{\alpha}\overset{\circ}{X}_{\beta}$ равна a_I^{-1} см (естественной единице); поэтому длины $\frac{1}{\rho\sigma}$ и l получены у нас в естественных единицах. Переходя к пространству R_5^I сжатием вдоль X^i в a раз, введем в нем вектор X^{Ii} и вычислим кривизну наших сфер в R_5^I по формуле:

$$\rho^I\sigma = X^{I\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\sigma = \frac{d\sigma}{dl^I}.$$

Мы найдем тогда радиус кривизны в сантиметрах равным:

$$\frac{1}{\rho^I_{\sigma=1}} = l^I_{\sigma=1} = \frac{1}{a_I\rho_{\sigma=1}} = \frac{l}{a_I} = \frac{\sqrt{8}}{a_I\sqrt{\varkappa}\,b} = \frac{\sqrt{8}\,e_0}{\varkappa m_0 c^2 b}. \tag{13}$$

Поступило
7 II 1938.

---

* Заметим, что $\mathfrak{M}_{ik} = 0$ представляет необходимое условие для того, чтобы $\sigma_1 = \text{const}$.