Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ ДИФФРАКЦИИ ЩЕЛИ И ПОЛОСЫ. I

Мы опять исходим из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial y^2}+\varkappa^2 u(x,\ y)=0, \tag{1}$$

причем мы исследуем диффракцию щели и полосы, параллельных оси Z-ов и шириной в $2a$.

Координатная система расположена, как у решетки [1], а начало координат делит пополам щель или полосу.

Таким образом, действительны уравнения:

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_0(y-s)\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_0(y+s)\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds, \tag{2}$$

когда $H_0(y)=\left.\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}\right|_{x=0}$ дано вдоль плоскости YZ [см. (10) [1]], и

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty N_0(y-s)\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds+$$
$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty N_0(y+s)\,Q_0(\varkappa\sqrt{x^2+s^2})\,ds, \tag{3}$$

когда $N_0(y)=u(0,y)$ известно вдоль плоскости YZ [это уравнение вытекает из (6) [1]].

Электрическая сила падающей волны *всегда* равна $e^{-i\varkappa x}$, причем последняя двигается вдоль положительной оси X-ов.

В случае I *электрическая* сила параллельна оси Z-ов и, таким образом, $H_0(y)=-i\varkappa$ для падающей волны [см. (9) [1]].

В случае II *магнитная* сила параллельна оси Z-ов, а на плоскости YZ магнитная сила падающей волны равна $\frac{1}{c}$.

Мы всегда будем иметь:

$$H_0(y)=H_0(-y);\quad N_0(y)=N_0(-y). \tag{4}$$

Уравнение (1) удовлетворяется правой частью выражения (3), очевидно, и без производной по x. Вводя поэтому такое выражение в (1) и полагая потом $x=0$, мы получим, принимая во внимание значение $H_0(y)$,

$$-H_0(y)=\varkappa^2 C(y)+\frac{d^2C(y)}{dy^2}, \tag{5}$$

где

$$C(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty N_0(y-s)\,Q_0(\varkappa s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty N_0(y+s)\,Q_0(\varkappa s)\,ds. \tag{6}$$

Мы рассмотрим теперь щель для случая I.

При этом мы полагаем $u(x, y)$ равным электрической силе, которая будет всюду непрерывна и исчезнет на плоскости YZ, *вне* щели.

Из (2) при $x=0$ следует:

$$u(0, y)=N_0(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_0(y-s)\,Q_0(\varkappa s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_0(y+s)\,Q_0(\varkappa s)\,ds \tag{7}$$

или на основании сказанного и нашего положения [см. ([1])] получим из (7)

$$N_0(y)=-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{a+y} Q_0(\varkappa s)\,ds-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{a-y} Q_0(\varkappa s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_a^\infty H_0(s)\,Q_0[\varkappa(s+y)]\,ds+\frac{1}{\pi}\int_a^\infty H_0(s)\,Q_0[\varkappa(s-y)]\,ds;\quad |y|\leqslant a. \tag{8}$$

Для данного случая следует из (6):

$$C(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} N_0(s)\,Q_0[\varkappa(s+y)]\,ds;\quad y\geqslant a. \tag{9}$$

Выражение (5) является следствием (3), а (8) вытекает из (2). *Оба вместе* дают нам интегральное уравнение для определения $N_0(y)$.

Мы получим поэтому, принимая во внимание дифференциальное уравнение для $Q_0(x)$, для искомого интегрального уравнения выражение

$$N_0(y)=-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{a+y} Q_0(\varkappa s)\,ds-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{a-y} Q_0(\varkappa s)\,ds+\int_{-a}^{+a} N_0(t)\,K(y, t)\,dt;\quad |y|\leqslant a, \tag{10}$$

причем

$$K(y, t)=-\frac{\varkappa^2}{\pi^2}\int_a^\infty \frac{Q_1[\varkappa(t+s)]}{\varkappa(t+s)}\{Q_0[\varkappa(s+y)]+Q_0[\varkappa(s-y)]\}\,ds. \tag{11}$$

Встречающаяся здесь перемена порядка интегрирования вполне допустима. Теперь переходим к полосе и притом к случаю II.

Под $u(x, y)$ будем теперь подразумевать магнитную силу и введем величину

$$Z_0(y)=1-cN_0(y), \tag{12}$$

причем $N_0(y)$ в данном случае есть магнитная сила на плоскости YZ.

Вследствие сказанного $Z_0(y)$ всюду непрерывна и на основании нашего положения равна нулю на плоскости YZ *вне* полосы.

Мы поэтому вводим $Z_0(y)$ в (9) вместо $N_0(y)$ и получим величину, которую мы обозначим через $C_1(y)$. Поэтому, принимая во внимание известное соотношение

$$\int_0^\infty Q_0(\varkappa s)\,ds = \frac{i\pi}{2\varkappa}, \tag{13}$$

мы получим вместо (6)

$$C(y) = \frac{i}{\varkappa c} - \frac{1}{c} C_1(y). \tag{14}$$

Из (5) следует, где теперь $H_0(y)$ пропорционально слагаемой вдоль оси Y-ов электрической силы на плоскости YZ,

$$cH_0(y) = i\varkappa - \varkappa^2 C_1(y) - \frac{d^2 C_1(y)}{dy^2}. \tag{15}$$

Так как нам необходимо знать $N_0(y)$ лишь на полосе, ибо вне последней $N_0(y)$, т. е. магнитная сила на основании нашего положения равна $\frac{1}{c}$, то мы получим для этого случая из (2), причем вследствие (12) мы тотчас переходим к величине $Z_0(y)$:

$$Z_0(y) = 1 - \frac{c}{\pi}\int_a^\infty H_0(s)\,\{Q_0[\varkappa(s+y)] + Q_0[\varkappa(s-y)]\}\,ds. \tag{16}$$

Если мы введем сюда (15), то, опять принимая во внимание (13) и переменяя порядок интегрирования, как в (10), из (16) следует

$$Z_0(y) = -\frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{a+y} Q_0(\varkappa s)\,ds - \frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{a-y} Q_0(\varkappa s)\,ds + \int_{-a}^{+a} Z_0(t)\,K(y,t)\,dt; \quad |y| \leqslant a \tag{17}$$

с тем же значением для $K(y, t)$, как и в (11).

Мы видим поэтому, что (17) тождественно с (10), причем только тут стоит $Z_0(y)$ на месте $N_0(y)$.

Отсюда следует, что как для щели в случае I, так и для полосы в случае II мы имеем *одно и то же* интегральное уравнение (10) или (17).

Это уравнение мы можем преобразовать, для чего делаем $y = a$.

Тогда получим из (17):

$$0 = -\frac{i\varkappa}{\pi}\int_0^{2a} Q_0(\varkappa s)\,ds + \int_{-a}^{+a} Z_0(t)\,K(a,t)\,dt. \tag{18}$$

Вычтя это выражение из (17), имеем:

$$Z_0(y) = \frac{i\varkappa}{\pi}\int_y^a \{Q_0[\varkappa(a+s)] - Q_0[\varkappa(a-s)]\}\,ds + \int_{-a}^{+a} Z_0(t)\,K_1(y,t)\,dt; \quad |y| \leqslant a, \tag{19}$$

причем

$$K_1(y,t) = K(y,t) - K(a,t). \tag{20}$$

Для дальнейшего преобразования мы полагаем:

$$N_0(y) = \int_y^a F(\eta)\,d\eta, \quad |y| \leqslant a \tag{21}$$

и примем

$$F(\eta) = -F(-\eta). \tag{22}$$

Поэтому из (19) следует:

$$F(y) = \frac{i\varkappa}{\pi}\{Q_0[\varkappa(a+y)] - Q_0[\varkappa(a-y)]\} + \int_0^a F(\eta) K_2(y, \eta)\, d\eta; \quad |y| < a, \tag{23}$$

причем

$$K_2(y, \eta) = -\frac{\varkappa^2}{\pi^2}\int_{-\eta}^{+\eta} dt \int_a^{\infty} \frac{Q_1[\varkappa(t+s)]}{t+s}\{Q_1[\varkappa(s+y)] - \\ - Q_1[\varkappa(s-y)]\}\, ds; \quad |y| < a. \tag{24}$$

Непосредственно видно, что соответственные ядра будут несимметричны относительно своих аргументов. Однако они непрерывны, как это мы увидим дальше.

Институт математики и механики
Ленинградский государственный университет

Поступило
27 IX 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XX, № 2—3, 105—108 (1938).