Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. ЛУЗИН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С. П. Фиников недавно привлек внимание на необходимость строгого доказательства для одного предложения, касающегося систем уравнений с частными производными. Рассматриваемое в себе предложение это не представляет, может быть, выдающегося теоретического интереса. Практически же оно очень важно. Достаточно указать на его роль в различных вопросах анализа и геометрии, где оно является ценным инструментом (как мы это покажем на примерах) и где его должно рассматривать как средство для устанавливания существований. В дальнейшем мы констатируем это обстоятельство, дав полное решение одного вопроса классической дифференциальной геометрии, поставленного теорией поверхностей уже давно, ответ на который, казалось, представлял значительные трудности.

Теорема. *Для всякой данной системы уравнений с частными производными, написанной в нормальной форме Коши-Ковалевской*:

$$\frac{\partial^{r_1} U_1}{\partial x_1^{r_1}} = \Phi_1, \quad \frac{\partial^{r_2} U_2}{\partial x_1^{r_2}} = \Phi_2, \ldots, \frac{\partial^{r_m} U_m}{\partial x_1^{r_m}} = \Phi_m, \tag{1}$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ — *голоморфные функции независимых переменных* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, *неизвестных функций* $U_1, U_2, \ldots, U_m$ *и их частных производных до соответственных порядков* $r_1, r_2, \ldots, r_m$ *включительно* (*производные, написанные в левых частях, в правые части не входят*), *рассматриваемых как независимые переменные*,—*можно найти такую фиксированную систему многочленов* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ с целыми коэффициентами *от букв* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что будут справедливы одновременные точные неравенства*:

$$|P_1 - U_1| > 0, \quad |P_2 - U_2| > 0, \ldots, |P_m - U_m| > 0,$$

в области D *измерений* n, *зависящей от* $U_1, U_2, \ldots, U_m$, *каково бы ни было голоморфное решение* $U_1, U_2, \ldots, U_m$ *данной системы* (1) *уравнений с частными производными.*

Доказательство. Известно, что каждая система уравнений с частными производными, написанная в нормальной форме Коши-Ковалевской (1), может быть приведена к линейному однородному виду:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_1} = \sum_{k,l} A_{kl}^i \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \qquad \begin{matrix}(i, k = 1, 2, 3, \ldots, \mu) \\ (l = 2, 3, \ldots, n),\end{matrix} \tag{2}$$

где коэффициенты A^i_{kl} обозначают голоморфные функции одних лишь букв $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$. Важно заметить, что редукция данной системы (1) к линейному однородному виду (2) осуществляется путем введения вспомогательных неизвестных функций, которые, будучи присоединены к прежним, составляют систему функций $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$, $\mu \geqslant m$, удовлетворяющую приведенной системе (2). Поэтому можно ограничиться доказательством предложенной теоремы лишь для случая линейных однородных систем (2).

Если теперь мы возьмем за начальные условия

$$U_1 = \omega_1,\ U_2 = \omega_2,\ \ldots,\ U_\mu = \omega_\mu \quad \text{для} \quad x_1 = x_1^0,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ суть произвольные функции от $x_2, x_3, \ldots, x_n$, разложимые в ряд Тейлора в точке $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$, тогда искомые функции U_1, $U_2, \ldots, U_\mu$, будучи разложимы по степеням $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0$, имеют вид:

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega_i + \frac{\omega_{i1}}{1!}(x_1 - x_1^0) +$$

$$+ \frac{\omega_{i2}}{2!}(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + \frac{\omega_{ik}}{k!}(x_1 - x_1^0)^k + \ldots, \tag{3}$$

где ω_{ik} есть частная производная $\dfrac{\partial^k U_i}{\partial x_1^k}$, вычисленная для $x_1 = x_1^0$.

С другой стороны, если мы будем последовательно брать производные $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^3}{\partial x_1^3}, \ldots$ от каждого уравнения системы (2), исключая при этом всякий раз посредством этих уравнений и уравнений, выведенных из них предыдущими дифференцированиями, производные $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^3}{\partial x_1^3}, \ldots$ от неизвестных функций $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$, мы придем к уравнениям:

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial x_1^k} = \Omega_{ik}\left(U_1, \ldots, U_\mu, \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k U_\mu}{\partial x_n^k}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

в которых Ω_{ik} обозначают функции одних лишь переменных $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$ и их частных производных до порядка k, взятых по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Следует заметить, что Ω_{ik} суть голоморфные функции от букв $U_1, U_2, \ldots, U_\mu$ и суть многочлены от их частных производных по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Делая $x_1 = x_1^0$ в равенстве (4), мы будем иметь равенства:

$$\omega_{ik} = \Omega_{ik}\left(\omega_1, \ldots, \omega_\mu, \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k \omega_\mu}{\partial x_n^k}\right), \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, 3, \ldots \mu), \\ (k = 1, 2, 3 \ldots).\end{matrix} \tag{5}$$

Пусть теперь i есть какое-нибудь фиксированное число из чисел $1, 2, 3, \ldots, \mu$, и сделаем в равенствах (5) $k = 1, 2, 3, \ldots, \nu$. Если к полученным таким образом ν равенствам мы присоединим их последовательные частные производные по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$ до порядка ν включительно, то необходимо наступит такой момент ν_0, когда число всех полученных таким образом уравнений превзойдет число функций ω и их частных производных, которые там содержатся. Действительно, когда мы берем частные производные порядка $\leqslant \nu$ от равенств (5),

$1 \leqslant k \leqslant \nu$, мы получаем $\nu \cdot \frac{n(n+1)\ldots(n+\nu-1)}{1.2.3\ldots\nu}$ новых и прежних равенств; с другой стороны, функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ и их частные производные, там содержащиеся, имеются в числе $\mu \cdot \frac{n(n+1)\ldots(n+2\nu-1)}{1.2.3\ldots(2\nu)}$. А это последнее число будет очевидно меньше предыдущего, лишь только ν превзойдет произведение $\mu \cdot 2^n$. Начиная с этого момента ν_0, число полученных равенств превзойдет число произвольных функций ω и их частных производных. Так как Ω_{ik} суть голоморфные функции переменных ω и суть многочлены от их частных производных, то существует непременно по крайней мере одна голоморфная функция $\mathfrak{F}(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_s$, которая не есть тождественно равная нулю и такая, что если мы заменим в ней переменные t количествами ω_{ik} $(k=1, 2, 3, \ldots, \nu_0)$ и их частными производными до порядка ν_0 по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, то мы получим выражение, тождественно равное нулю, каковы бы ни были произвольные начальные функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$.

Пусть теперь $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_s^0$ — какая-нибудь система значений переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{s_1}$, для которой функция $\mathfrak{F}$ есть голоморфная и заведомо отличная от нуля. Так как всякий многочлен от $x_2, x_3, \ldots, x_n$ вполне определяется своей величиной и величинами его частных производных, вычисленными в фиксированной точке $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ и могущими быть взятыми произвольно, мы можем заменить количества ω_{ik} многочленами p_{ik} от букв $x_2, x_3, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы результат подстановки многочленов p_{ik} и их частных производных в функцию $\mathfrak{F}$ был заведомо отличным от нуля в фиксированной точке $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$. Приняв это во внимание, мы немедленно усматриваем, что система многочленов P_i от букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенная равенствами:

$$P_i = p_i + \frac{p_{i1}}{1!}(x_1 - x_1^0) + \frac{p_{i2}}{2!}(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{p_{i\nu_0}}{\nu_0!}(x_1 - x_1^0)^{\nu_0}, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, \mu), \tag{6}$$

удовлетворяет условиям предложенной теоремы, каковы бы ни были многочлены p_i от букв $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Нам остается лишь показать, что коэффициенты многочленов P_i можно выбрать целыми числами. В самом деле, согласно исследованиям И. Н. Хлодовского всякая голоморфная функция $f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ может быть аппроксимирована, так же как и ее частные производные до наперед заданного порядка, многочленом $\pi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, имеющим целые коэффициенты, и его соответствующими частными производными в каждой области D, которая не содержит никакой точки $x_2, x_3, \ldots, x_n$ с целой координатой, причем эта аппроксимация может быть сделана столь точной, как это заранее задано. Отсюда следует, что мы можем заменить в равенствах (6) многочлены $\frac{p_{i_1}}{1!}, \ldots, \frac{p_{i\nu_0}}{\nu_0!}$ многочленами $q_{i1}, \ldots, q_{i\nu_0}$ с целыми коэффициентами так, чтобы результат подстановки в функцию $\mathfrak{F}$ многочленов $1!\,q_{i_1}, \ldots, \nu_0!\,q_{i\nu_0}$ и их частных производных продолжал оставаться отличным от нуля для фиксированной точки $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$. Ясно, что, беря за p_i произвольные многочлены с целыми коэффициентами, мы оканчиваем доказательство предложенной теоремы.

Примечание. Мы предположили, что решение $U_1, U_2, \ldots, U_m$ системы (1) есть голоморфное. Однако рассуждение распространяется само собой и на такие решения $U_1, U_2, \ldots, U_m$, которые, не будучи аналитическими, обладают непрерывными частными производными до порядка ν_0 (зависящего только от натуральных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m, n$). В самом деле, уравнения (4) и равенства (5) сохраняют силу, как и определение функции $\mathfrak{F}$. В этих условиях многочлены (6) продолжают удовлетворять условиям предложенной теоремы. Но для того чтобы еще далее уменьшить число предполагаемых частных производных у функций U_i, для этого необходимо уже изменить метод.

Поступило
13 II 1938.