Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

ЛУ-КИНГ-ХУА

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ПРОБЛЕМЕ ВАРИНГА ДЛЯ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 II 1938)

Пусть k—положительное целое и $c_1, c_2, \ldots$—положительные целые, зависящие только от k. Пусть $P(x)$—многочлен k-й степени с положительным первым коэффициентом, принимающий целые значения. Пусть $r_s(N)$ есть число решений

$$\sum_{i=1}^{s} P(x_i) = N, \quad x_i \geqslant 0 \tag{1}$$

и $R_s(N)$ есть число решений

$$\sum_{i=1}^{s} p_i^k = N,$$

где p простые.

Тогда я могу доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Асимптотическая формула Hardy-Littlewood'a* (1) *для* $r_s(N)$ *имеет место при* $s \geqslant 2^k + 1$.

Теорема 2. *Асимптотическая формула Виноградова* (2) *для* $R_s(N)$ *имеет место при* $s \geqslant 2^k + 1$.

Доказательство теоремы 2 существенно зависит от следующей леммы.

Лемма 1. Пусть

$$f(\alpha) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i x^k \alpha}, \quad P^k = N;$$

тогда

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^{2^k} d\alpha = O\left(P^{2^k - k} (\log P)^{c_1}\right),$$

или, в более общей форме, для $m \leqslant k$ имеем:

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^{2^m} d\alpha = O\left(P^{2^m - m} (\log P)^{c_2}\right).$$

Доказательство леммы 1 основано на следующих леммах.

Лемма 2. Пусть $s \geqslant r$ и $n \ll P$; тогда число решений:

$$x_1^k + \ldots + x_r^k - x_{r+1}^k - \ldots - x_s^k \equiv O \pmod{n}, \quad x_\nu \ll P,$$

будет

$$\ll \frac{d^{c_3}(n)}{n} \sum_{n_1/n} \frac{(n, n_1^k)}{n_1} P^s (\log P)^{c_4}.$$

Лемма 3.

$$\sum_{m_1}^{P} \cdots \sum_{m_{c_5}}^{P} \frac{d^{c_6}(m)}{m} \sum_{n_1/m} \frac{(m, n_1^k)}{n_1} = O((\log P)^{c_7}),$$

где m есть общее наименьшее кратное чисел $m_1 \ldots, m_{c_5}$ и m_i пробегает $O(P)$ положительных чисел.

Интересными следствиями теоремы 2 являются:

1. Каждое достаточно большое нечетное число является суммой девяти кубов простых чисел.

2. Каждое достаточно большое целое $\equiv 17 \pmod{2^4 \cdot 3 \cdot 5}$ есть сумма 17 четвертых степеней простых чисел.

Очевидно при помощи применяемых здесь средств мы можем доказать, что

3. Почти все нечетные целые числа суть суммы пяти кубов простых чисел.

Здесь мы укажем некоторые результаты, получаемые с помощью теоремы 1.

Пусть $P(x)$ удовлетворяет условию, что не может существовать целое $q\,(>1)$ такое, что $P(x) \equiv P(O) \pmod{q}$. Пусть $G(P(x))$ есть наименьшее целое s, для которого (1) разрешимо для всех достаточно больших N. Тогда имеем:

1. Для $k=4$

$$G(P(x)) \leqslant 17.$$

Это содержит результат Estermann'a, Davenport'a и Heilbronn'a ([3]).

2. Для $k=5$

$$G(P(x)) \leqslant 31.$$

Равенство имеет место, только если

$$P(x) \equiv aF(x) + b \pmod{2^5} \quad 2 \dagger a, \tag{2}$$

где

$$F(x) = 2^5 F_5(x) - 2^4 F_4(x) + 2^3 F_3(x) - 2^2 F_2(x) + F_1(x)$$

и

$$F_i(x) = \frac{1}{i!} x(x-1) \cdots (x-i+1).$$

Более определенно, вводя идею Виноградова, мы можем доказать, что если $P(x)$ не удовлетворяет (2), тогда

$$G(P(x)) \leqslant 29.$$

Результаты 1 и 2 являются улучшением моего предыдущего общего результата

$$G(P(x)) \leqslant 2^{k+1}(k-1),$$

полученного восемь месяцев тому назад.

Китай.

Поступило
17 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Труды Математического института Академии Наук СССР (X, гл. 7). [2] Труды Тбилисского математического института, III, теорема 2 (1937). [3] Proc. of London Math. Soc., **41**, 126—150.