Доклады Академии Наук СССР

1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Д. ШИН

О КВАЗИ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 I 1938)

Пусть $L_2\,(a,\,b)$ — совокупность комплексных измеримых по Лебегу функций $f\,(x),\,a \leqslant x \leqslant b$, для которых интеграл Лебега $\int\limits_a^b |f\,(x)\,|^2\,dx$ существует. $L_2\,(a,\,b)$ образует гильбертовое пространство, где скалярное произведение двух элементов f и g определено формулой:

$$(fg) = \int\limits_a^b f\,(x)\,\overline{g\,(x)}\,dx.$$

Предположим, что комплексные функции $P_{k,\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k=0,1,\,\ldots\,n$; $\nu=0,1,\,\ldots\,n$, измеримы по Лебегу в конечном или бесконечном интервале $(a,\,b)$, и функции $\frac{1}{P_{k,k}\,(x)}$, $k=0,1\,\ldots\,n$, $P_{k,\nu}(x)$, $\nu < k$, $k=1,2,\,\ldots\,n$, $\nu=0,1,\,\ldots\,n-1$, принадлежат к $L_2(a',\,b')$, где $(a',\,b')$ — произвольный, конечный замкнутый интервал, внутренний к $(a,\,b)$.

Введем следующие обозначения:

1) D_F — совокупность функций $f\,(x)$ из $L_2\,(a,\,b)$ таких, что

$$f^{[0]} = P_{0,\,0}\,f,$$

$$f^{[k]}\,(x) = i\,P_{k,\,k}\frac{d}{dx}f^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} P_{k,\,j}\,f^{[j]},\quad k=1,2,\,\ldots\,n-1,$$

равны абсолютно непрерывным функциям почти всюду в $(a,\,b)$, и

$$f^{[n]}(x) = i\,P_{n,\,n}\frac{d}{dx}f^{[n-1]} + \sum_{j=0}^{n-1} P_{n,\,j}\,f^{[j]}$$

принадлежит к $L_2\,(a,\,b)$.

2) F — оператор, определенный в D_F и преобразующий функцию $f(x)$ из D_F в $f^{[n]}(x): Ff = f^{[n]}$.

3) D_G — совокупность функций $g(x)$ из $L_2\,(a,\,b)$ таких, что

$$g^{\{0\}} = \overline{P_{n,n}}\,g,$$

$$g^{\{k\}} = \overline{iP_{n-k,\,n-k}}\frac{d}{dx}g^{\{k-1\}} + \sum_{j=0}^{k-1}\overline{\left(\frac{P_{n-j,\,n-k}P_{n-k,\,n-k}}{P_{n-j,\,n-j}}\right)}g^{\{j\}},\ k=1,2,\ldots n-1,$$

равны абсолютно непрерывным функциям почти всюду в (a, b), и

$$g^{\{n\}}=i\overline{P_{0,0}}\;\frac{d}{dx}g^{\{n-1\}}+\sum_{j=0}^{n-1}\overline{\left(\frac{P_{n-j,0}\,P_{0,0}}{P_{n-j,\,n-j}}\right)}\,g^{\{j\}}$$

принадлежит к $L_2(a, b)$.

4) G — оператор, определенный в D_G и преобразующий функцию $g(x)$ из D_G в $g^{\{n\}}(x): Gg=g^{\{n\}}$.

5)
$$[f\,g]=(Ffg)-(fGg)=\int_a^b(\bar{g}f^{[n]}-f\overline{g^{\{n\}}})\,dx=[fg]_b-[fg]_a\,,$$

где

$$[fg]_x=i\sum_{k=1}^{n}f^{[n-k]}(x)\,\overline{g^{\{k-1\}}}\,.$$

6) D_H — совокупность функций $h(x)$ из D_F таких, что $[h, g]=0$ для всех g из D_G.

7) H — оператор, определенный в D_H и преобразующий функцию $h(x)$ из D_H в $h^{[n]}(x): Hh=h^{[n]}$, $(Hh, g)=(h, Gg)$.

8) D_T — совокупность функций $t(x)$ из D_G таких, что $[f, t]=0$ для всех f из D_F.

9) T — оператор, определенный в D_T и преобразующий функцию $t(x)$ из D_T в $t^{\{n\}}(x): Tt=t^{\{n\}}$, $(Ff, t)=(f, Tt)$.

На основании теоремы существования квази-дифференциального уравнения $f^{[n]}(x)=f^*(x)$, $a'\leqslant x\leqslant b'$, $f^*\subset L_2(a, b)$ легко показать, что операторы F, G, H и T суть линейные замкнутые и $F^*\equiv T$, $G^*\equiv H$, $H^*\equiv G$, $T^*\equiv F$, где знак * означает сопряженный оператор.

Для произвольного линейного оператора N обозначим через $P(N)$, $C(N)$, $Q(N)$ и $R(N)$ соответственно точечный спектр, непрерывный спектр, резидуальный спектр и резольвентное множество (1). Тогда

$$P(H)\subseteq P(F),\ C(H)\subseteq P(F)+C(F),\ Q(F)\subseteq Q(H),\ R(F)\subseteq Q(H)+R(H),$$
$$P(T)\subseteq P(G),\ C(T)\subseteq P(G)+C(G),\ Q(G)\subseteq Q(T),\ \ R(G)\subseteq Q(T)+R(T),$$
$$P(H)\subseteq\overline{P}(G)+\overline{Q}(G),\ \ Q(H)\subseteq\overline{P}(G),\ \ P(H)+Q(H)=\overline{P}(G)+\overline{Q}(G),$$
$$P(T)\subseteq\overline{P}(F)+\overline{Q}(F),\ \ Q(T)\subseteq\overline{P}(F),\ \ P(T)+Q(T)=\overline{P}(F)+\overline{Q}(F),$$
$$\overline{P}(F)\subseteq P(T)+Q(T),\ \ \overline{Q}(F)\subseteq P(T),\ \ \overline{C}(F)=C(T),\ \ \overline{R}(F)=R(T),$$
$$\overline{P}(G)\subseteq P(H)+Q(H),\ \ \overline{Q}(G)\subseteq P(H),\ \ \overline{C}(G)=C(H),\ \ \overline{R}(G)=R(H).$$

Необходимым и достаточным условием того, что эти операторы не имеют резидуального спектра, является

$$P(H)=P(F)=\overline{P}(T)=\overline{P}(G).$$

Если функции $P_{k,\nu}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\overline{P}_{n-k,\,n-k}=P_{k,k},\ \ k=0, 1, \ldots\left[\frac{n}{2}\right],\ \overline{\left(\frac{P_{n-\nu,\,n-k}P_{n-k,\,n-k}}{P_{n-\nu,\,n-\nu}}\right)}=$$
$$=P_{k,\nu},\ \nu<k,\ \ k=1, 2, \ldots n;\ \ \nu=0, 1, \ldots n-1,$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$, то $F\equiv G$, $H\equiv T$, $H^*\equiv F$, $F^*\equiv H$ и оператор H является эрмито-симметрическим. Обозначим через (p, q) индекс дефекта оператора H. Из результатов исследования решений уравнения $Ff-lf=0$, $I(l)\neq 0$, следует, что числа p и q независимо друг от друга могут принимать только одно из следующих значений: $0, n-2\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right], n-\left[\frac{n}{2}\right], n$. Предположим, что $p \leqslant q$ и максимально симметрическое расширение оператора H обозначим через H_p. Функция $f(x)$ принадлежит к D_{H_p} тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$f(x) = h(x) + \sum_{k=1}^{p} C_k \, \nu_{p,k}(x),$$

где $h(x) \subset D_H$, C_k — произвольные постоянные, $\nu_{p,k}(x) = f_k^+(x) - \sum_{j=1}^{p} A_{k,j} f_j^-(x)$, $f_k^+(x)$, $k=1, 2, \ldots p$, $f_j^-(x)$, $j=1, 2, \ldots q$, — биортонормированные решения соответственно уравнений $Ff - lf = 0$ и $Ff - \bar{l}f$, $I(l) \neq 0$, $\| A_{k,j} \|$ — унитарная матрица p-го порядка. Функция $g(x)$ принадлежит к $D_{H_p^*}$ тогда и только тогда, когда $[\nu_{p,k}, g] = 0$, $k = 1, 2, \ldots p$. Индекс дефекта оператора H_p имеет вид $(0, q-p)$.

В частности, если n — четное число и оператор F действительный, т. е. $\overline{Ff} \equiv F\bar{f}$, то число $p=q$ может принимать только одно из значений $0, \frac{n}{2}, n$, и оператор H_p является самосопряженным (гипермаксимальным). Все точки l, $I(l) \neq 0$, принадлежат к $R(H_p)$ и $Q(H_p)$ является пустым множеством. Обозначим через $f_k(x, l)$, $k = 1, 2, \ldots 2m$, ортонормированные решения уравнения

$$f^{[n]} - lf = 0, \quad I(l) \neq 0.$$

Если $p = 2m$, то все функции $f_k(x, l)$, $k = 1, 2, \ldots n$, принадлежат к $L_2(a, b)$. Если $p = m$, то m функций, например $f_1, f_2, \ldots f_m$, принадлежат к $L_2(a, b)$, а остальные m функций $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots f_{2m}$ принадлежат или к $L_2(a, c)$ или к $L_2(c, b)$, где c — произвольная точка, внутренняя к (a, b). Если $p = 0$, то m функций, например $f_1, f_2, \ldots f_m$, принадлежат к $L_2(a, c)$, а остальные m функций $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots f_{2m}$ принадлежат к $L_2(c, b)$. Резольвента самосопряженного оператора H_p является интегральным оператором с ядром $G(x, y; l, p)$:

$$G(x,y;l,n) = \frac{\begin{vmatrix} f_1(x,l) & f_2(x,l) & \ldots & f_n(x,l) & g_n(x,y;l) \\ [f_1, \nu_{n,1}] & [f_2, \nu_{n,1}] & \ldots & [f_n, \nu_{n,1}] & [g_n, \nu_{n,1}] \\ [f_1, \nu_{n,2}] & [f_2, \nu_{n,2}] & \ldots & [f_n, \nu_{n,2}] & [g_n, \nu_{n,2}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [f_1, \nu_{n,n}] & [f_2, \nu_{n,n}] & \ldots & [f_n, \nu_{n,n}] & [g_n, \nu_{n,n}] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [f_1, \nu_{n,1}] & [f_2, \nu_{n,1}] & \ldots & [f_n, \nu_{n,1}] \\ [f_1, \nu_{n,2}] & [f_2, \nu_{n,2}] & \ldots & [f_n, \nu_{n,2}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [f_1, \nu_{n,n}] & [f_2, \nu_{n,n}] & \ldots & [f_n, \nu_{n,n}] \end{vmatrix}},$$

где

$$g_n(x, y; l) = \operatorname{sign}(x-y) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{iP_{n,n}(y)} \frac{\partial \ln W(y, l)}{\partial f_k^{[n-1]}(y, l)} f_k(x, l),$$

$$W(x, l) = \begin{vmatrix} f_1^{[0]}(x,l) & f_2^{[0]}(x,l) & \ldots & f_n^{[0]}(x,l) \\ f_1^{[1]}(x,l) & f_2^{[1]}(x,l) & \ldots & f_n^{[1]}(x,l) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{[n-1]}(x,l) & f_2^{[n-2]}(x,l) & \ldots & f_n^{[n-1]}(x,l) \end{vmatrix},$$

причем $[g_n, v_{n,k}]$ вычисляется по переменному x;

$$G(x,y;\,l,m)=\frac{\begin{vmatrix} f_1(x,l) & f_2(x,l) & \ldots & f_m(x,l) & g_m(x,y;\,l) \\ [f_1,\,v_{m,1}]_b & [f_2,\,v_{m,1}]_b & \ldots & [f_m,\,v_{m,1}]_b & [g_m,\,v_{m,1}]_b \\ [f_1,\,v_{m,2}]_b & [f_2,\,v_{m,2}]_b & \ldots & [f_m,\,v_{m,2}]_b & [g_m,\,v_{m,2}]_b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [f_1,\,v_{m,m}]_b & [f_2,\,v_{m,m}]_b & \ldots & [f_m,\,v_{m,m}]_b & [g_m,\,v_{m,m}]_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [f_1,\,v_{m,1}]_b & [f_2,\,v_{m,1}]_b & \ldots & [f_m,\,v_{m,1}]_b \\ [f_1,\,v_{m,2}]_b & [f_2,\,v_{m,2}]_b & \ldots & [f_m,\,v_{m,2}]_b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [f_1,\,v_{m,m}]_b & [f_2,\,v_{m,m}]_b & \ldots & [f_m,\,v_{m,m}]_b \end{vmatrix}},$$

где

$$g_m(x,y;\,l)=\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{iP_{n,n}(y)}\dfrac{\partial \ln W(y,l)}{\partial f_k^{[n-1]}(y,l)}f_k(x,l), & x<y, \\ \sum\limits_{k=m+1}^{2m}\dfrac{1}{iP_{n,n}(y)}\dfrac{\partial \ln W(y,l)}{\partial f_k^{[n-1]}(y,l)}f_k(x,l), & x>y, \end{cases}$$

и предполагается, что функции $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots f_{2m}$ принадлежат к $L_2(c,b)$.

$$G(x,y;\,l,0)=\begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{iP_{n,n}(y)}\dfrac{\partial \ln W(y,l)}{\partial f_k^{[n-1]}(y,l)}f_k(x,l), & x<y, \\ \sum\limits_{k=m+1}^{2m}\dfrac{1}{iP_{n,n}(y)}\dfrac{\partial \ln W(y,l)}{\partial f_k^{[n-1]}(y,l)}f_k(x,l), & x>y, \end{cases}$$

$G(x,y;\,l,n)$ является ядром типа Гильберта-Шмидта. Действительная и мнимая части $G(x,y;\,l,m)$ и $G(x,y;\,l,0)$ суть ядра типа Карлемана. Если мы обозначим через $E_p(\lambda)$ разложение единицы самосопряженного оператора H_p, то $E_p(\Delta)=E_p(\beta)-E_p(\alpha)$, $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$, является интегральным оператором с ядром $E_p(x,y;\,\Delta)$ типа Карлемана ([1]). При фиксированном Δ и почти для всех y, $E_p(x,y;\,\Delta)$, как функция от x, удовлетворяет уравнению

$$H_p E_p(x,y;\,\Delta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mu\, dE_p(x,y;\,\Delta_\mu).$$

Ядро $E_p(x,y;\,\Delta)$ может быть представлено в виде интеграла Стильтьеса:

$$E_p(x,y;\,\Delta)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_k(x,c;\,\lambda)\,f_j(y,c;\,\lambda)\,d\rho_{kj}(\lambda),$$

где $f_k(x,c;\,\lambda)$, $k=1,2,\ldots n$, — решения уравнения $f^{[n]}-\lambda f=0$, принимающие начальные данные

$$f_k^{[\nu-1]}(c,c;\,\lambda)=\delta_{k\nu}=\begin{cases}1 & \text{для } k=\nu,\\ 0 & \text{для } k\neq\nu,\end{cases}$$

$\rho_{kj}(\lambda)$ — функции ограниченной вариации в каждом конечном интервале и непрерывные справа. Для фиксированной точки c эти функции определяются единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
29 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, chapters IV and X.