Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Д. ШИН

О РЕШЕНИЯХ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $u^{[n]}=lu$, $I(l)\neq 0$, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К $L_2(0,\infty)$

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 I 1938)

Функцию $f(x)$ мы назовем принадлежащей к $L_2(a,b)$, если $f(x)$ измерима по Лебегу и $|f(x)|^2$ интегрируема по Лебегу в интервале (a,b). Пусть комплексные функции $\frac{1}{P_{k,k}(x)}$; $k=0,1,\dots n$, $P_{k,\nu}(x)$, $\nu<k$, принадлежат к $L_2(0,b)$, где b—произвольное положительное число. Тогда существуют n линейно независимых решений уравнения $u^{[n]}(x)=0$, принадлежащих к $L_2(0,b)$, где

$$u^{[k]}=iP_{k,k}\frac{d}{dx}u^{[k-1]}+\sum_{j=0}^{k-1}P_{k,j}u^{[j]},\quad k=1,2,\dots n,$$
$$u^{[0]}=P_{0,0}u.$$

Если дифференциальное выражение $u^{[n]}$ самосопряженное, т. е. функции $P_{k,\nu}$ удовлетворяют условиям:

$$\overline{P_{n-k,\,n-k}}=P_{k,k},\ k=0,1,\dots\left[\frac{n}{2}\right];\ \overline{\left(\frac{P_{n-\nu,\,n-k}P_{n-k,\,n-k}}{P_{n-\nu,\,n-\nu}}\right)}=$$
$$=P_{k,\nu},\ \nu<k,\ k=1,2,\dots n;\ \nu=0,1,\dots n-1,$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$—целая часть числа $\frac{n}{2}$, то билинейная форма имеет вид:

$$\int_0^b(\bar{v}u^{[n]}-u\overline{v^{[n]}})\,dx=[u,v]_b-[u,v]_0\,[u,v]_x=i\sum_{k=1}^{n}u^{[n-k]}(x)\,\overline{v^{[k-1]}(x)}.$$

Если u и v суть решения соответственно уравнений $u^{[n]}=lu$, $v^{[n]}=\bar{l}v$, $I(\bar{l})\neq 0$, то

$$\int_0^b|u|^2dx=\frac{1}{2iI(l)}([u,u]_b-[u,u]_0),$$
$$\int_0^b|v|^2dx=-\frac{1}{2iI(l)}([v,v]_b-[v,v]_0). \tag{1}$$

Обозначим через $u_1, u_2, \ldots u_n$ линейно независимые решения уравнения $u^{[n]}=lu$, $I(l)\neq 0$, принимающие такие начальные значения, что

$$[u_k, u_{n+1-\nu}]_0=\delta_{k,\nu}=\begin{cases} i \text{ для } k=\nu, \\ 0 \text{ для } k\neq\nu, \end{cases} \quad k,\nu=1,2,\ldots n.$$

Мы утверждаем, что функции $U_k=u_k+\sum_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{k,\nu}u_{n+1-\nu}$, $k=1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]$, где комплексные постоянные $l_{k,\nu}$ удовлетворяют условиям:

$$\lim_{b\to\infty}[U_k, U_k]_b=0,\ k=1,2,\ldots\left[\frac{n}{2}\right],$$

принадлежат к $L_2(0,\infty)$.

Уравнение $[U_k, U_k]_b=0$ может быть написано в виде:

$$[u_k,u_k]_b+\sum_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{k,\nu}[u_{n+1-\nu},u_k]_b+\sum_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\bar{l}_{k,\nu}[u_k,u_{n+1-\nu}]_b+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{j=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{k,\nu}\bar{l}_{k,j}[u_{n+1-\nu},u_{n+1-j}]_b=0. \quad (2)$$

Если мы фиксируем индекс k и рассмотрим величины $R(l_{k,\nu}), I(l_{k,\nu})$, $\nu=1,2,\ldots n-\left[\frac{n}{2}\right]$, как декартовы координаты, то уравнение (2) выражает действительную замкнутую поверхность F_b^k второго порядка, лежащую целиком в ограниченной части пространства. В самом деле, из соотношений $[u_k,u_\nu]=-\overline{[u_\nu,u_k]}$, $k,\nu=1,2\ldots n$, следует, что все коэффициенты уравнения (2) чисто мнимые, и из равенства (1) следует, что величины $i[u_{n+1-\nu},u_{n+1-\nu}]_b$, $\nu=1,2,\ldots n-\left[\frac{n}{2}\right]$, имеют один и тот же знак. С другой стороны,

$$|[u_k,u_\nu]_b|^2<|[u_k,u_k]_b|\cdot|[u_\nu,u_\nu]_b|,\ k,\nu=1,2,\ldots n.$$

Следовательно проекция поверхности F_b^k на каждую координатную плоскость есть круг или эллипс. Легко показать, что радиус r_b^k круга на координатной плоскости $(R(l_{k,k}), I(l_{k,k}))$ является действительным числом и имеет вид:

$$r_b^k=\frac{1}{|[u_{n+1-k},u_{n+1-k}]_b|}.$$

Если этот круг не вырождается в точку при $b\to\infty$, то функция u_{n+1-k} принадлежит к $L_2(0,\infty)$.

Так как $[U_k,U_k]_0=2iR(l_{k,k})$, то для всех точек, лежащих на поверхности F_b^k, имеем:

$$\int_0^b |U_k|^2\,dx=-\frac{R(l_{k,k})}{I(l)},$$

для точек, лежащих на поверхности F_b^k, $I(l_{k,k}) \neq 0$, откуда вся мнимая ось $I(l_{k,k})$ лежит вне поверхности F_b^k, и для точек этой оси имеем:

$$\int_0^b |U_k|^2\,dx > -\frac{R(l_{k,k})}{I(l)}. \tag{3}$$

Но так как $\int_0^b |U_k|^2\,dx$—непрерывная функция от $l_{k,\nu}$, то неравенство (3) имеет место для всех точек, лежащих вне поверхности F_b^k, а для точек, лежащих внутри F_b^k, имеет место обратное неравенство:

$$\int_0^b |U_k|^2\,dx < -\frac{R(l_{k,k})}{I(l)}.$$

Пусть $b' < b''$. Тогда поверхности $F_{b'}^k$ и $F_{b''}^k$ не могут иметь ни одной общей точки, так как в противном случае мы имели бы

$$\int_{b'}^{b''} |U_k|^2\,dx = 0 \quad \text{и} \quad U_k(x) = 0,\ b' \leqslant x \leqslant b''.$$

С другой стороны, если точка $l_{k,\nu}$ лежит на поверхности $F_{b''}^k$, то

$$\int_0^{b'} |U_k|^2\,dx < \int_0^{b''} |U_k|^2\,dx = -\frac{R(l_{k,k})}{I(l)},$$

т. е. поверхность $F_{b''}^k$ лежит целиком внутри $F_{b'}^k$. Обозначим через F^k предельное положение F_b^k, $b \to \infty$. Тогда для всех точек, лежащих внутри и на поверхности F^k, имеем:

$$\int_0^{\infty} |U_k|^2\,dx \leqslant -\frac{R(l_{k,k})}{I(l)}.$$

Следовательно все функции $U_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]$, принадлежат к $L_2(0, \infty)$.

Допустим, что одна из функций $u_{n+1-\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]$, например u_{n+1-k}, принадлежит к $L_2(0, \infty)$. Тогда функция $U_k - l_{k,k}u_{n+1-k} = u_k + \sum\limits_{\nu=1(\neq k)}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{k,\nu}u_{n+1-\nu}$ также принадлежит к $L_2(0, \infty)$. Если мы положим $u_{n+1-j} = \overset{*}{u}_{n+1-j}$, $j \neq k$, $j = 1, 2, \ldots n - \left[\frac{n}{2}\right]$, $u_{n+1-k} + u_{n+1-j} = \overset{*}{u}_{n+1-k}$, то функция $U_k^* = u_k + \sum\limits_{\nu=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} l_{k,\nu}^* \overset{*}{u}_{n+1-\nu}$, где $l_{k,\nu}^*$ удовлетворяют условию $\lim\limits_{b\to\infty} [U_k^* U_k^*]_b = 0$, принадлежит к $L_2(0, \infty)$. Но, как легко показать, $l_{k,\nu}^* = l_{k,\nu}$ для всех $\nu \neq k$, откуда функция $l_{k,k}^*(u_{n+1-k} + u_{n+1-j})$ принадлежит к $L_2(0, \infty)$, и так как $l^*_{k,k} \neq 0$, то функция u_{n+1-j}, где j—произвольное число из $1, 2, \ldots n - \left[\frac{n}{2}\right]$, также принадлежит к $L_2(0, \infty)$.

Следовательно число p решений уравнения $u^{[n]} = lu$, $I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$, равно или $\left[\frac{n}{2}\right]$, или $n - \left[\frac{n}{2}\right]$, или n. Аналогичным образом число q решений уравнения $v^{[n]} = \bar{l}v$, $I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$, равно или $\left[\frac{n}{2}\right]$, или $n - \left[\frac{n}{2}\right]$, или n. В случае, когда дифференциальное выражение $u^{[n]}$ действительное, т. е. $\overline{u^{[n]}} = \bar{u}^{[n]}$, числа p и q совпадают.

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
9 I 1938.