Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. КАМЕНЕЦКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ. I

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 22 IX 1939)

Пусть заданы: 1) последовательность целых неотрицательных чисел $n_0 \leqslant n_1 \ldots \leqslant n_m$; 2) последовательность точек на комплексной плоскости $x_0, x_1, \ldots, x_m$ такая, что $|x_i - x_j| + |n_i - n_j| \neq 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 0, 1, \ldots, m)$; 3) последовательность чисел $c_0, c_1, \ldots, c_m$.

Теорема 1. *Для того чтобы задача построения полинома степени не выше m $f_m(x)$, удовлетворяющего условиям*

$$f_m^{(n_i)}(x_i) = c_i \quad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

имела одно и только одно решение, как бы ни были расположены точки x_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ на комплексной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы последовательность n_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$n_i \leqslant i \quad (i = 0, 1, \ldots); \tag{a}$$

для каждого i найдется такое j $(i, j = 0, 1, \ldots, m)$, что

$$n_i = n_j = j. \tag{b}$$

Определение. Последовательность $n_0 \leqslant n_1 \ldots \leqslant n_m$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющую условиям (a) и (b), будем называть ступенчатой.

Бесконечную последовательность целых неотрицательных чисел $n_0 \leqslant \leqslant n_1 \ldots$ такую, что каждая из подпоследовательностей $n_0, n_1, \ldots, n_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$—ступенчатая, также будем называть ступенчатой.

Пусть: 1) $f(x)$—вещественная функция переменной x, имеющая на отрезке (a, b) вещественной оси непрерывные производные до порядка $m+1$ включительно; 2) $n_0, n_1, \ldots, n_m$—некоторая ступенчатая последовательность; 3) x_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$—некоторая последовательность точек, лежащих на отрезке (a, b), удовлетворяющая условию b) теоремы 1; 4) $f_m(x)$—полином степени не выше m, удовлетворяющий условиям

$$f_m^{(n_i)}(x_i) = f^{(n_i)}(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

по теореме 1 существующий и однозначно определяемый этими условиями. Обозначим $f(x) - f_m(x)$ через $R_m(x)$.

Теорема 2. *Функция* $R_m(x)$ *может быть представлена в следующей форме*:

$$R_m(x) = \int_{\eta_0}^{x} dx' \int_{\eta_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{\eta_m}^{x^{(m)}} f^{(m+1)}(x^{(m+1)})\, dx^{(m+1)},$$

где η_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — *некоторые вещественные числа, зависящие от* f и x_i $(i = 0, 1, \ldots)$, *удовлетворяющие неравенствам* $a \leqslant \eta_i \leqslant b$.

Далее имеет место неравенство

$$|R_m(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}\left(|x - x_0| + s_m\right)^{m+1},$$

где M_{m+1} — $\max \operatorname{mod} f^{m+1}(x)$ *на отрезке* (a, b), а $s_m = \sum_{i=1}^{m} |x_{i-1} - x_i|$.

Определения. Пусть: 1) n_i $(i = 0, 1, \ldots)$—бесконечная ступенчатая последовательность; 2) x_i $(i = 0, 1, \ldots)$ — бесконечная последовательность точек на комплексной плоскости такая, что каждая из последовательностей $x_0, x_1, \ldots, x_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ удовлетворяет условию b) теоремы 1; 3) $f(x)$—функция, бесконечно дифференцируемая в точках x_i $(i = 0, 1, \ldots)$.

Последовательность полиномов степени не выше m $f_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяющих условиям

$$f_m^{(n_i)}(x_i) = f^{(n_i)}(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

мы будем называть интерполяционным процессом (P_{n_i}) для функции $f(x)$, ассоциированным с последовательностью точек $\{x_i\}$. Как частные случаи, при $n_i = 0$ и $n_i = i$ получаем интерполяционные процессы Ньютона и Абеля [1].

Если для точек некоторого множества M выполняется соотношение

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x),$$

то мы будем говорить, что для функции $f(x)$ интерполяционный процесс (P_{n_i}), ассоциированный с последовательностью точек $\{x_i\}$, сходится на множестве M.

Полиномы $f_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots)$, фигурирующие в предыдущих определениях, мы будем называть интерполяционными полиномами для функции $f(x)$, ассоциированными с интерполяционным процессом (P_{n_i}) и последовательностью точек $\{x_i\}$.

Теорема 3. *Пусть*: 1) n_i $(i = 0, 1, \ldots)$—*бесконечная ступенчатая последовательность*; 2) x_i $(i = 0, 1, \ldots)$—*последовательность точек, расположенных на одной прямой, сходящаяся к точке* X *таким образом, что ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} (x_{i-1} - x_i)$—*абсолютно сходящийся, и такая, что* $|x_i - x_s| + |n_i - n_j| \neq 0$ $(i \neq j;\ i, j = 0, 1, \ldots)$. *Тогда интерполяционный процесс* (P_{n_i}), *ассоциированный с последовательностью точек* $\{x_i\}$, *сходится для всякой функции* $f(x)$, *аналитической в круге с центром в точке* X, *содержащем все точки последовательности* $\{x_i\}$, *причем сходимость обеспечена в круге с центром в точке* X *и радиуса* $\frac{R}{2}$, *где* R—*радиус сходимости степенного ряда для* $f(x)$ *в точке* X.

Эта теорема является частичным обобщением соответствующей теоремы В. Л. Гончарова, относящейся к сходимости обобщенного ряда Абеля [1].

Следствие теоремы 3. Если выполняются условия 1) и 2) предыдущей теоремы и все числа $f^{(n_i)}(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots)$, где $f(x)$—функция, голоморфная в точке X, равны нулю, то $f(x)\equiv 0$. В частности, если $f(x)$—целая функция, не равная тождественно нулю, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x_{i-1}-x_i|$ не может сходиться, если $f^{(n_i)}(x_i)=0$ $(i=0, 1, \ldots)$.

Теорема 4. *Пусть*: 1) n_i $(i=0, 1, \ldots)$—*некоторая бесконечная ступенчатая последовательность*; 2) x_i $(i=0, 1, \ldots)$—*последовательность точек, расположенных на отрезке* $(-1, +1)$ *вещественной оси, такая, что* $|x_i-x_j|+|n_i-n_j|\neq 0$ $(i\neq j;\ i, j=0, 1, \ldots)$. *Тогда интерполяционный процесс* (P_{n_i}), *ассоциированный с последовательностью точек* $\{x_i\}$, *сходится для всех целых функций класса* $<\left[1, \frac{\pi}{4}\right]$(2).

Константа $\frac{\pi}{4}$ является точной, как это показывает пример:

$$n_i=i,\quad x_i=(-1)^{n+1},\quad f(x)=\sin\frac{\pi}{4}(x+1).$$

Эта теорема является обобщением теоремы I. J. Schoenberg'a, относящейся к сходимости обобщенного ряда Абеля (3).

Следствие теоремы 4. Пусть выполняются условия 1) и 2) теоремы 4 и пусть $f(x)$—целая функция класса $<\left[1, \frac{\pi}{4}\right]$, тогда если $f^{(n_i)}(x_i)=0$, то $f(x)\equiv 0$.

Воронежский государственный университет

Поступило 17 VIII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гончаров, Ann. Éc. Norm., 47, 1—78 (1930). [2] В. Л. Гончаров, Интерполяционные процессы и целые функции. Успехи математических наук, III. [3] I. J. Schoenberg, Trans. Amer. Math., 40, 12—23 (1936).