Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. ЗАЛГАЛЛЕР и П. КОСТЕЛЯНЕЦ

К ЗАДАЧЕ О ПЛАВАЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 IX 1939)

Прямой однородный плавающий цилиндр сохраняет равновесие при любом повороте, оставляющем образующие параллельными поверхности жидкости. Требуется определить возможные формы основания цилиндра.

В математической интерпретации эта задача сводится к установлению формы плоской замкнутой кривой, обладающей тем свойством, что хорда некоторой постоянной длины l при непрерывном движении всегда делит площадь, ограниченную кривой, в постоянном отношении.

Этой задачей в последнее время занимались многие математики([1]). В ряде случаев доказано, что кривая, удовлетворяющая поставленным условиям, может быть только окружностью.

В первой части этой работы мы покажем существование и приведем примеры отличных от окружности невыпуклых кривых, удовлетворяющих поставленным условиям. Во второй части будут даны рассуждения, которые приводят к элементарным доказательствам нескольких ранее известных и некоторых новых утверждений. В дальнейшем мы для простоты применим инфинитезимальные рассуждения, которые можно заменить строгими.

I. 1. Нетрудно показать, что если хорда плоской замкнутой и спрямляемой кривой в любом положении отсекает дугу постоянной длины, то та же хорда отсекает и постоянную площадь, и обратно. Достаточно рассмотреть элементарное смещение, которое переводит хорду AB в положение $A'B'$, заменяя площадь $AA'B$ площадью $A'BB'$ и дугу AA' дугой BB'. Из равенства площадей следует равенство элементарных треугольников $AA'B$ и $A'BB'$, имеющих по одной равной и одну общую сторону, а из равенства треугольников следует равенство длин дуг AA' и BB', и обратно.

2. Существуют такие неправильные равносторонние многоугольники, у которых диагональ, охватывающая постоянное число сторон, будет постоянной длины. Эти многоугольники могут быть построены самых различных форм. В частности, если рассматривать правильный n-угольник, как $2n$-угольник, принимая за вершины середины сторон и вершины исходного многоугольника, то диагональ этого нового многоугольника, охватывающая $2k+1$ сторону, будет постоянной длины.

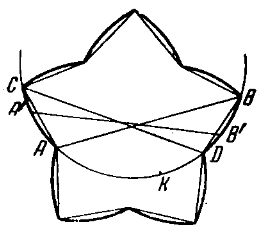
В подобных многоугольниках та же диагональ отсекает постоянную площадь.

3. Из неправильного равностороннего многоугольника, диагональ которого, охватывающая половину всех сторон, постоянна, можно полу-

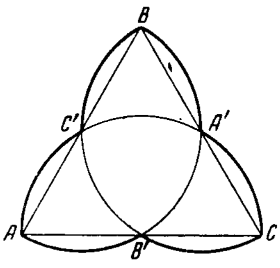
нить отличную от окружности кривую, удовлетворяющую условиям задачи.

Рассмотрим подобный многоугольник $AC...BD...$ (фиг. 1). $AB=CD=1$ и $AC=BD$. Четырехугольник $ACBD$ вписуемый. Заменим сторону AC дугой AC и сторону BD дугой BD. Делаем то же самое с каждой парой противолежащих сторон. Полученная замкнутая кривая, состоящая из конечного числа дуг окружностей, удовлетворяет условиям задачи при хорде $AB=l$. Площадь $A'C...BB'$ будет постоянной при всех положениях хорды $A'B'$, потому что перемещение последней только поворачивает сегмент AKB в $A'K'B'$. Одновременно дуга кривой делится пополам.

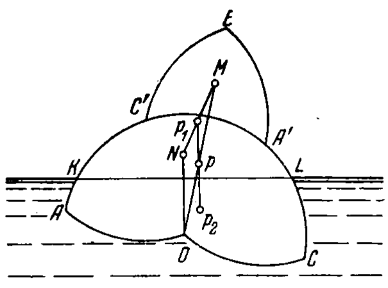
Для получения кривой с помощью дуг окружностей из многоугольника, диагональ которого, охватывающая половину всех сторон, остается постоян-



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

ной длины, условие равносторонности исходного многоугольника не существенно. Достаточно, чтобы противолежащие пары сторон были равны. Например, можно исходить из восьмиугольника $ABCDEFGH$, у которого одновременно $AE=BF=CG=DH$ и $AB=EF, BC=FG, CD=GH, DE=HA$.

4. Простейший из полученного класса примеров представлен на фиг. 2. Для этого примера легко проверить, что соответствующий прямой цилиндр действительно будет плавать в безразличном равновесии (если плотность его вдвое меньше плотности жидкости) (фиг. 3). Надо проверить, что линия, соединяющая центр тяжести тела P и центр тяжести подводной части P_2, и следовательно надводной части P_1, перпендикулярна к поверхности жидкости. Рассмотрим произвольное положение тела в жидкости. Пусть M—центр тяжести части $C'BA'$, а N—центр тяжести сегмента $KC'A'L$. Тогда

$$MP_1 : NP_1 = S_{(KC'A'L)} : S_{(C'BA')},$$
$$MP \cdot PO = \text{const},$$
$$ON \perp KL;$$

так как в одном положении (когда KL совпадает с AA') тело плавает, то

$$MP_1 : NP_1 = MP : PO = \text{const};$$

следовательно $PP_1 \parallel ON \perp KL$.

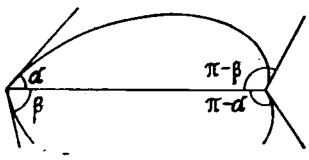
5. Следует отметить, что во всех примерах хорда l делит площадь пополам и что все примеры дают невыпуклые и недифференцируемые кривые.

II. 1. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением дифференцируемых кривых и докажем, что выпуклые кривые, удовлетворяющие условиям задачи, дифференцируемы.

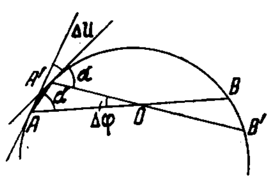
а) Пусть имеется выпуклая или дифференцируемая кривая, удовлетворяющая поставленным условиям при хорде длины l. На концах хорды l правые касательные к кривой образуют с хордой l углы, сумма которых равна π. Это следует из рассмотрения элементарного сдвига. То же относится и к левым касательным.

b) Подобная выпуклая кривая дифференцируема. Если бы в какой-нибудь точке касательные справа и слева не совпадали, то при рассмотрении противоположного конца хорды l, проведенной из этой точки, обнаружилось бы нарушение выпуклости (фиг. 4).

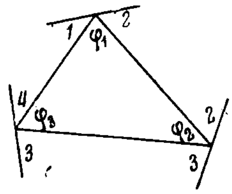
2. Если во всех точках кривой касательная образует постоянный угол $\alpha \neq 0$ с хордой l, то кривая должна быть окружностью. Для установления



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

этого покажем существование и постоянство кривизны в каждой точке (фиг. 5):

a) $\triangle AA'B' = \triangle ABB'$,

$A'O = OB$,

$A'O = \dfrac{A'O + OB}{2}$,

$$\lim_{A'\to A} A'O = \frac{1}{2} \lim_{A'\to A} (A'O + OB) = \frac{l}{2}.$$

b) $\angle MAB = \angle M'A'B'$,

откуда

$$\angle \Delta u = \angle \Delta\varphi.$$

c) $$k = \lim_{A'\to A} \frac{\Delta u}{AA'} = \lim_{A'\to A} \frac{\Delta\varphi}{AA'} = \lim_{A'\to A} \frac{\sin\Delta\varphi}{AA'} =$$

$$= \lim_{A'\to A} \frac{\sin\angle A'AO}{A'O} = \frac{2\sin\alpha}{l} = \text{const}.$$

3. На основании показанного выше элементарно получаются некоторые уже известные результаты.

a) Если три хорды l_1, l_2, l_3, образующие треугольник ABC (фиг. 6), удовлетворяют поставленным условиям, то кривая является окружностью ([2]):

$$\angle 2 = \pi - \angle 1 - \varphi_1,$$
$$\angle 3 = \angle 1 + \varphi_1 - \varphi_2,$$
$$\angle 1 = \angle 4 = \pi - \angle 1 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3,$$

откуда ($\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$),

$$\angle 1 = \varphi_2,$$

т. е. угол касательной с хордой постоянный.

b) То же самое для четырехугольника $ABCD$ со сторонами l_1, l_2, l_3, l_4 и с углами φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Из аналогичного соображения получается $\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4$, т. е. четырехугольник $ABCD$ вписуемый, и следовательно жесткий, что приводит к предыдущей задаче a) при треугольнике ABC.

Поступило
17 IX 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Gericke, Math. Z., **40**, H. 3 (1935). [2] E. Salkowski, Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie.