Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Д. ШИН

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИ-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 I 1938)

Пусть $P_{k,\nu}$, $\nu \leqslant k$; $k, \nu = 0, 1, \ldots n$, суть комплексные измеримые по Лебегу функции от действительного переменного x, определенные в конечном замкнутом интервале (a, b). Для произвольной комплексной функции $u(x)$ введем следующие обозначения:

$$u^{[0]} = P_{0,0}\,u,\ u^{[1]} = iP_{1,1}\frac{d}{dx}u^{[0]} + P_{1,0}\,u^{[0]},\ u^{[2]} = iP_{2,2}\frac{d}{dx}u^{[1]} + \\ + P_{2,1}\,u^{[1]} + P_{2,0}\,u^{[0]},$$

. . . .

$$u^{[n]} = iP_{n,n}\frac{d}{dx}u^{[n-1]} + P_{n,n-1}\,u^{[n-1]} + P_{n,n-2}\,u^{[n-2]} + \ldots + \\ + P_{n,1}\,u^{[1]} + P_{n,0}\,u^{[0]}.$$

Мы утверждаем, что если функции $\left|\frac{1}{P_{k,k}}\right|^2$, $k = 0, 1, \ldots n$, $|P_{k,\nu}|^2$, $\nu < k$, и $|f(x)|^2$ интегрируемы по Лебегу в интервале (a, b), то существует единственная функция $u(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) выражения $u^{[k]}(x)$, $k = 0, 1, \ldots n-1$, равны абсолютно непрерывным функциям почти всюду в интервале (a, b),

2) $u^{[n]}(x) = f(x)$ почти всюду в интервале (a, b) и

3) $u^{[k]}(c) = C_k$, $k = 0, 1, \ldots n-1$, $a \leqslant c \leqslant b$, где C_k—произвольные постоянные.

Функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям 1)—3), мы назовем решением уравнения $u^{[n]}(x) = f(x)$, принимающим начальные значения 3).

Допустим, что решение $u(x)$ существует. Тогда

$$u^{[n-1]}(x) = C_{n-1} + \int_c^x \frac{1}{iP_{n,n}(\xi)} f(\xi)\,d\xi - \sum_{\nu=0}^{n-1}\int_c^x \frac{P_{n,\nu}(\xi)}{iP_{n,n}(\xi)} u^{[\nu]}(\xi)\,d\xi,$$

. . . .

$$u^{[k]}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} C_j \int_c^x \frac{d\xi_1}{iP_{k+1,k+1}(\xi_1)} \int_c^{\xi_1} \cdots \int_c^{\xi_{j-k-1}} \frac{d\xi}{iP_{j,j}(\xi)} +$$

$$+\int_c^x \frac{d\xi_1}{iP_{k+1,\,k+1}(\xi_1)}\int_c^{\xi_1}\cdots\int_c^{\xi_{n-k-1}}\frac{1}{iP_{n,\,n}(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi -$$

$$-\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{\nu=0}^{j-1}\int_c^x \frac{d\xi_1}{iP_{k+1,\,k+1}(\xi_1)}\int_c^{\xi_1}\cdots\int_c^{\xi_{j-k-1}}\frac{P_{j,\,\nu}(\xi)}{iP_{j,\,j}(\xi)}\,u^{[\nu]}(\xi)\,d\xi,$$

$$k=0,1,\dots n-1.$$

Эти равенства мы можем рассматривать как систему интегральных уравнений относительно $u^{[k]}(x)$, $k=0,1,\dots n-1$. Если существуют функции $u^{[k]}(x)$, $k=0,1,\dots n-1$, удовлетворяющие этим уравнениям, то очевидно функция

$$u(x)\equiv\frac{u^{[0]}(x)}{P_{0,\,0}(x)}$$

удовлетворяет условиям 1)—3).

Пусть

$$\varphi_k(x)=\sum_{j=k}^{n-1}C_j\int_c^x \frac{d\xi_1}{iP_{k+1,\,k+1}(\xi_1)}\int_c^{\xi_1}\cdots\int_c^{\xi_{j-k-1}}\frac{d\xi}{iP_{j,\,j}(\xi)}+$$

$$+\int_c^x \frac{d\xi_1}{iP_{k+1,\,k+1}(\xi_1)}\int_c^{\xi_1}\cdots\int_c^{\xi_{n-k-1}}\frac{1}{iP_{n,\,n}(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$\Gamma_{k,\nu}(x,\xi)=\sum_{j=k+1}^{n}\frac{P_{j,\,\nu}(\xi)}{iP_{j,\,j}(\xi)}\int_\xi^x \frac{d\xi_1}{iP_{k+1,\,k+1}(\xi_1)}\int_\xi^{\xi_1}\cdots\int_\xi^{\xi_{j-k-2}}\frac{d\xi_{j-k-1}}{iP_{j-1,\,j-1}(\xi_{j-k-1})}=$$

$$=\sum_{j=k+1}^{n}\frac{P_{j,\,\nu}(\xi)}{P_{j,\,j}(\xi)}\,g_{k,j}(x,\xi),\quad \nu\leqslant k.$$

Тогда система интегральных уравнений может быть написана в виде:

$$u^{[k]}(x)=\varphi_k(x)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_c^x \Gamma_{k,\,\nu}(x,\xi)\,u^{[\nu]}(\xi)\,d\xi,\quad k=0,1,\dots n-1.$$

Функции $g_{k,j}(x,\xi)$ непрерывны в конечном замкнутом интервале (a,b). Следовательно существует такая постоянная M, что $|g_{k,j}(x,\xi)|\leqslant M$, для всех $k=0,1,\dots n-1$; $j=1,2,\dots n$; $a\leqslant x,\xi\leqslant b$. С другой стороны, функции $\frac{P_{j,\,\nu}(\xi)}{P_{j,\,j}(\xi)}$, $\nu<j$, абсолютно интегрируемы по Лебегу в интервале (a,b), откуда для каждого положительного числа $\rho<1$ можно найти такое число $\delta=\delta(\rho)$, что $\sum_{j=1}^{n}\left|\int_\Delta\left|\frac{P_{j,\,\nu}(\xi)}{P_{j,\,j}(\xi)}\right|d\xi\right|<\frac{\rho}{nM}$, для всех $\nu=0,1,\dots n-1$, если только длина интервала Δ меньше 2δ. Но тогда $\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\int_\Delta\left|\Gamma_{k,\,\nu}(x,\xi)\right|d\xi\right|<\rho$.

Если мы положим

$$u_0^{[k]}(x)=0,\ u_{m+1}^{[k]}(x)=\varphi_k(x)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_c^x \Gamma_{k,\nu}(x,\xi)\,u_m^{[\nu]}(\xi)\,d\xi,$$

$$h_0^{[k]}(x)=0,\ h_{m+1}^{[k]}(x)=u_{m+1}^{[k]}(x)-u_m^{[k]}(x)=-\sum_{\nu=0}^{n-1}\Gamma_{k,\nu}(x,\xi)\,h_m^{[\nu]}(\xi)\,d\xi,$$

$$k=0,1,\dots n-1;\ m=0,1\dots,$$

то ряды $\sum_{m=0}^{\infty} h_m^{[k]}(x)$, $k=0,1,\dots n-1$, а следовательно и последовательности функции $\{u_m^{[k]}(x)\}$, $k=0,1,\dots n-1$, сходятся равномерно в интервале $(c-\delta,\ c+\delta)$. Очевидно, предельные функции $u^{[k]}(x)$, $k=0,1,\dots n-1$, удовлетворяют исходным интегральным уравнениям и они единственны в интервале $(c-\delta, c+\delta)$.

Теперь разобьем интервал (a, b) на конечное число друг друга перекрывающих интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_N$ с длинами меньше 2δ. Если точка $x=c$ содержится в Δ_j, то, начиная с Δ_j, мы строим решения $u^{[k]}(x)$, $k=0,1,\dots n-1$, так, чтобы они совпадали хотя бы в одной общей точке двух соседних интервалов. Тогда в силу единственности они совпадают во всех общих точках этих двух интервалов. Следовательно продолженные на весь интервал (a, b) решения также будут единственными.

Дифференциальные выражения

$$v^{\{0\}}=\overline{P}_{n,n}v,\ v^{\{1\}}=i\overline{P}_{n-1,n-1}\frac{d}{dx}v^{\{0\}}+\overline{\left(\frac{P_{n,n-1}P_{n-1,n-1}}{P_{n,n}}\right)}v^{\{0\}};$$

. . . .

$$v^{\{n\}}=i\overline{P}_{0,0}\frac{d}{dx}v^{\{n-1\}}+\sum_{j=0}^{n-1}\overline{\left(\frac{P_{n-j,0}P_{0,0}}{P_{n-j,n-j}}\right)}v^{\{j\}}$$

назовем сопряженными относительно $u^{[k]}$, $k=0,1,\dots n$. Очевидно, если функция $|g(x)|^2$ интегрируема по Лебегу в интервале (a, b), то существует единственное решение $v(x)$ уравнения $v^{\{n\}}(x)=g(x)$, обладающее аналогичными свойствами 1)—3).

Пусть $u_k(x)$, $k=1,2,\dots n$, суть решения однородного уравнения $u^{[n]}(x)=0$. Как и в классическом случае, необходимым и достаточным условием линейной независимости этих решений является отличие от нуля детерминанта:

$$[w]_x=\begin{vmatrix} u_1^{[0]} & u_2^{[0]} & \dots & u_n^{[0]} \\ u_1^{[1]} & u_2^{[1]} & \dots & u_n^{[1]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{[n-1]} & u_2^{[n-1]} & \dots & u_n^{[n-1]} \end{vmatrix}=[w]_c\,e^{\,i\int_c^x \sum_{k=1}^{n}\frac{P_{k,k-1}(\xi)}{P_{k,k}(\xi)}d\xi}.$$

Функции $v_k(x)=\overline{\left(\frac{1}{P_{n,n}}\frac{\partial \ln [w]_x}{i\partial u_k^{[n-1]}}\right)}$, $k=1,2,\dots n$, являются решениями сопряженного однородного уравнения $v^{\{n\}}(x)=0$, причем имеют место равенства:

$$v_k^{\{\nu\}}=(-1)^{\nu}\overline{\left(\frac{\partial \ln [w]_x}{i\partial u_k^{[n-\nu-1]}}\right)},\ \nu=0,1,\dots n-1.$$

Если функции $u_k(x)$, $k=1,2,\dots n$, линейно независимы, то функции $v_k(x)$, $k=1,2,\dots n$, также линейно независимы, так как $[w]_x\{\overline{w}\}_x=1$, где

$$\{w\}_x=\begin{vmatrix} v_1^{\{0\}} & v_1^{\{1\}} & \dots & v_1^{\{n-1\}} \\ v_2^{\{0\}} & v_2^{\{1\}} & \dots & v_2^{\{n-1\}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n^{\{0\}} & v_n^{\{1\}} & \dots & v_n^{\{n-1\}} \end{vmatrix}=\{w\}_c e^{i\int\limits_c^x \sum\limits_{k=1}^n \overline{\left(\frac{P_{k,k-1}(\xi)}{P_{k,k}(\xi)}\right)}d\xi}.$$

Заметим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями соответственно уравнений $u^{[n]}(x)=f(x)$ и $v^{\{n\}}(x)=g(x)$ тогда и только тогда, когда они выражаются в виде:

$$u(x)=\sum_{k=1}^n C_k u_k(x)+\int\limits_c^x \sum_{k=1}^n u_k(x)\,\overline{v_k(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$v(x)=\sum_{k=1}^n C_k v_k(x)+\int\limits_c^x \sum_{k=1}^n v_k(x)\,\overline{u}_k(\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

где C_k—произвольные постоянные.

Билинейная форма сопряженных дифференциальных выражений $u^{[k]}$, $v^{\{k\}}$, $k=0,1,\dots n-1$, имеет вид:

$$\int\limits_a^b (\overline{v}\,u^{[n-1]}-u\,\overline{v^{\{n-1\}}})\,dx=i\sum_{k=1}^n u^{[n-k]}v^{\{k-1\}}\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Дифференциальное выражение $u^{[n]}$ мы назовем самосопряженным, если $u^{[k]}\equiv u^{\{k\}}$ для всех $k=0,1,\dots n$, т. е. если $\overline{P}_{n-k,n-k}=P_{k,k}$, $k=0,1,\dots\left[\frac{n}{2}\right]$, где $\left[\frac{n}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$, и $\overline{\left(\frac{P_{n-\nu,n-k}P_{n-k,n-k}}{P_{n-\nu,n-\nu}}\right)}=P_{k,\nu}$, $\nu<k$, $k=1,2,\dots n$; $\nu=0,1\dots n-1$.

Самосопряженные дифференциальные выражения вида:

$$P_0\frac{d}{dx}P_1\frac{d}{dx}\dots P_{n-1}\frac{d}{dx}P_n\frac{d}{dx}P_{n-1}\frac{d}{dx}\dots P_1\frac{d}{dx}P_0u,$$

$$P_0\frac{d}{dx}P_1\frac{d}{dx}\dots P_{n-1}\frac{d}{dx}P_n\frac{d}{dx}P_n\frac{d}{dx}P_{n-1}\frac{d}{dx}\dots P_1\frac{d}{dx}P_0u,$$

$$\sum_{k=0}^n\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(P_k\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right),\quad \sum_{k=0}^n\left[\frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}}\left(P_k\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right)+\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(P_k\frac{d^{n+1-k}u}{dx^{n+1-k}}\right)\right]$$

очевидно являются частными случаями.

Институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
9 I 1938.