Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Н. РУБАН

К ЗАДАЧЕ О ПЛАВАЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 IX 1939)

Задача о плавающем цилиндре заключается в следующем: однородный цилиндр с плоскими основаниями, перпендикулярными к его образующим, плавает в идеальной жидкости так, что образующие параллельны поверхности жидкости. Спрашивается, какова должна быть форма цилиндра, чтобы он плавал в любом положении.

Эта задача сводится к следующей: найти все плоские кривые, у которых каждая дуга длины l стягивается хордой одной и той же длины b; l и b удовлетворяют единственному условию $\frac{l}{b} \geqslant 1$.

Под словом «кривая» будем в дальнейшем подразумевать только такие кривые: пусть уравнение кривой в векторной форме будет $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s—длина дуги. Предположим, что $\vec{r}(s)$ дважды непрерывно дифференцируема. Обозначая вектор хорды с концами в точках $\vec{r}(s)$ и $\vec{r}(s+l)$ через $\vec{b}$, можем написать:

$$b^2 = (\vec{b})^2 = [\vec{r}(s+l) - \vec{r}(s)]^2.$$

Дифференцируя по s, имеем

$$[\vec{r}'(s+l) - \vec{r}'(s)]\,[\vec{r}(s+l) - \vec{r}(s)] = 0 \tag{1}$$

или

$$\vec{b}\,\vec{r}'(s+l) = \vec{b}\,\vec{r}'(s). \tag{2}$$

Будем предполагать, что кривые наши выпуклые. Тогда условие (2) означает, что углы между положительными направлениями касательной в точке s и вектором $\vec{b}$ и касательной в точке $s+l$ и вектором $\vec{b}$ равны. Здесь и в дальнейшем будем брать наименьшие положительные значения углов.

Дифференцируя (1) по s, получим:

$$[\vec{r}'(s+l) - \vec{r}'(s)]^2 + [\vec{r}(s+l) - \vec{r}(s)]\,[\vec{r}''(s+l) - \vec{r}''(s)] = 0,$$

что можно переписать в виде

$$4\sin^2\theta(s) + \vec{b}\,[k(s+l)\,\vec{n}(s+l) - k(s)\,\vec{n}(s)] = 0, \tag{3}$$

где $2\theta(s)$—угол между положительными направлениями касательных в точках s и $s+l$, $k(s)$—кривизна в точке s, $\vec{n}(s)$—нормаль в этой точке. Так как $\vec{b}\vec{n}(s)=b\sin\theta(s)$, $\vec{b}\vec{n}(s+l)=-b\sin\theta(s)$, то (3) можно переписать так:

$$4\sin^2\theta(s)=b\,[k(s+l)+k(s)]\sin\theta(s)$$

или

$$\sin\theta(s)\,\{[k(s+l)+k(s)]\,b-4\sin\theta(s)\}=0. \tag{4}$$

Так как кривые—выпуклые, то можно предположить, что $\sin\theta(s)\neq 0$. Тогда условие (4) сводится к следующему функциональному уравнению:

$$b\,[k(s+l)+k(s)]=4\sin\theta(s). \tag{5}$$

Докажем некоторые свойства исследуемых кривых.

1. Класс кривых с кривизной вида

$$k(s)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n\cos\frac{2\pi ns}{S}+b_n\sin\frac{2\pi ns}{S}\right) \tag{6}$$

содержит только окружность. S—периметр кривой.

Для доказательства рассмотрим две функции комплексного переменного z:

$$k_1(z)=a_0+\sum_{n=1}^{m}\cos\frac{\pi nl}{S}\,[(a_n-ib_n)z^n+(a_n+ib_n)z^{-n}], \tag{7}$$

$$k_2(z)=a_0l+\sum_{n=1}^{m}\frac{S}{\pi n}\sin\frac{\pi nl}{S}\,[(a_n-ib_n)z^n+(a_n+ib_n)z^{-n}]. \tag{8}$$

Так как $k(s)$ должна удовлетворять уравнению (5) и на окружности $(z)=1$

$$k_1\left(e^{\frac{2\pi is}{S}}\right)=k\left(s+\frac{l}{2}\right)+k\left(s-\frac{l}{2}\right), \tag{9}$$

$$k_2\left(e^{\frac{2\pi is}{S}}\right)=2\int_{s-\frac{l}{2}}^{s+\frac{l}{2}}k(t)\,dt, \tag{10}$$

то $k_1(z)$ и $k_2(z)$, в силу аналитичности, на всей плоскости комплексного переменного связаны соотношением

$$\frac{b}{4}k_1(z)=\sin\frac{k_2(z)}{4}. \tag{11}$$

Докажем, что хотя бы одна из функций $k_1(z)$, $k_2(z)$ равна постоянной. Действительно, пусть это не так; тогда a_n и b_n можно считать не равными одновременно нулю.

Зададим последовательность вещественных чисел

$$\alpha_n,\ (n=1,2,\ldots),\ \alpha_n\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Для каждого α_n найдем z_n, удовлетворяющее условию $k_2(z_n)=\alpha_n$.

Такое z_n существует, ибо это сводится к решению некоторого алгебраического уравнения. Из последовательности $\{z_n\}$ можно выбрать такую последовательность $\{z_{n_k}\}$, что или $z_{n_k}\to 0$ или $z_{n_k}\to\infty$ при $k\to\infty$. Действительно, в противном случае для последовательности $\{z_n\}$ выполнялось бы $K<|z_n|<L$ для всех n; K и L—постоянные числа; при

этом $K > 0$ и $L < \infty$. Но тогда из (8) видно, что $k_2(z_n) = \alpha_n$ ограничена вопреки предположению. На основании того, что коэффициенты при z^h и z^{-h} $b(z)$ исчезают одновременно, имеем $k_1(z_{n_k}) \to \infty$ при $k \to \infty$, но на основании (9) этого не может быть, ибо синус от вещественного аргумента ограничен. Следовательно $k_1(z)$ или $k_2(z) = \text{const}$.

Но если одна из них равна const, то на основании уравнения (11) и вторая тоже равна const.

Дифференцируя (10) по s и складывая с удвоенным (9) после замены независимого переменного, получим $k(s) = \text{const}$.

II. Только у окружности $\frac{l}{S} = \frac{1}{2}$.

Действительно, из (5) имеем

$$\sin\theta(s+l) = \frac{b}{4}[k(s+2l) + k(s+l)] = \frac{b}{4}[k(s) + k(s+l)] = \sin\theta(s),$$

или

$$\theta(s+l) = \theta(s). \tag{12}$$

Но так как

$$\theta(s) = \frac{1}{2}\int\limits_s^{s+l} k(t)\,dt, \tag{13}$$

то, дифференцируя (12), получаем:

$$k(s+l) = k(s). \tag{14}$$

Из (5) на основании (14) и (13) имеем

$$k(s) = \frac{2}{b}\sin\theta(s).$$

Но в силу (14) из (13) находим $\theta(s) = \text{const}$.

III. Только у окружности $\frac{l}{S} = \frac{1}{4}$.

Интегрируя (5) от s до $s+l$ и принимая во внимание (13), имеем:

$$\frac{\theta(s+l) + \theta(s)}{2}\,b = \int\limits_s^{s+l} \sin\theta(t)\,dt. \tag{15}$$

Из замкнутости кривой следует, что

$$\theta(s) + \theta(s+l) + \theta(s+2l) + \theta(s+3l) = \pi. \tag{16}$$

В силу условия $\frac{l}{|S|} = \frac{1}{4}$ четырехугольник с вершинами s, $s+l$, $s+2l$, $s+3l$ есть ромб, и, принимая во внимание условие (2), заключаем, что суммы углов $\theta(s+l)+\theta(s)$ и $\theta(s+2l)+\theta(s+3l)$, как дополняющие до π противоположные углы ромба, равны, что вместе с (16) дает

$$\theta(s+l) + \theta(s) = \frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

Принимая во внимание это и дифференцируя (15), получим:

$$\sin\theta(s+l) = \sin\theta(s).$$

В силу (17) $\theta(s) \leqslant \frac{\pi}{2}$, следовательно

$$\theta(s+l) = \theta(s). \tag{18}$$

Сравнивая (17) и (18), видим, что $\theta(s) = \text{const}$, т. е. $\theta'(s) = k(s+l) - k(s) = 0$. Это вместе с (5) дает $k(s) = \frac{2}{b}\sin\theta(s) = \text{const}$.

IV. Если из хорд b можно составить многоугольник с нечетным числом сторон и такой, что углы между сторонами не меняются при движении его вершин по кривой, то эта кривая есть окружность.

Доказательство. В вершинах многоугольника проведем касательные. Будем двигать его так, чтобы вершины не покидали нашу кривую. Возможны два случая: или углы между касательными и сторонами не меняются, или существует такое положение многоугольника, при сдвиге с которого хоть один угол между касательной и стороной изменится. В первом случае, принимая во внимание условие (2), видим, что $\theta(s) = \text{const}$, и следовательно $k(s) = \text{const}$.

Докажем, что второго случая не может быть. Действительно, посмотрим, как будут меняться углы между касательными и соседними с ними сторонами.

Так как касательные в концах каждой стороны наклонены к ней под равными углами, то приращения $\theta(s)$ в соседних вершинах имеют разные знаки. Это в силу нечетности числа сторон невозможно.

V. Если $\frac{l}{S} = \frac{p}{q}$ (где p и q—целые положительные числа) и

$$\theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0 \neq \frac{\pi n l}{S} \operatorname{ctg} \frac{\pi n l}{S} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[где θ_0—значение $\theta(s)$ у окружности длины S], то найдется такое ε, что из неравенства

$$|k(s) - k_0| < \varepsilon$$

следует $k(s) = k_0$; $k(s)$—кривизна кривой, k_0—кривизна окружности с периметром S.

Последний результат приводим без доказательства.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
17 IX 1939