Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВСКОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ. X

Мы рассмотрим в следующем простейший случай, именно уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

но в предположении

$$0 \leqslant x < \infty; \; 0 \leqslant y < \infty, \tag{2}$$

т. е. рассмотрим $\left(\text{плоская задача, так как } \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$ пространство между плоскостью XZ и YZ, которое расположено в квадранте с положительными x и y.

Таким образом мы исследуем уравнение (1) внутри угла в 90° с вершиной в начале координат, причем они лежат в соответственных плоскостях и перпендикулярны их линии пересечения.

Пространство внутри угла в 90° мы разделим на пять частей. (Так как мы имеем налицо плоскую задачу, то это разделение можно производить линиями, лежащими в плоскости рисунка.)

Пространство I бесконечное и образуется двумя линиями, параллельными осям координат и на расстоянии ct от них, с точкой пересечения на линии, делящей угол в 90° пополам.

Если мы продолжим эти линии до координатных осей, то получим бесконечные пространства II и II′, причем II своей длинной стороной совпадает с осью Y, а II′ своей длинной стороной—с осью X.

Таким образом у нас остается лишь квадрат со сторонами, равными ct. Мы разделим его на конечные пространства III и IV кругом с радиусом ct и с центром в начале координат, причем пространство IV содержит начало координат.

Мы предполагаем для простоты, что и важнее для применений, что

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}\bigg|_{x \to 0} = H(y, t) \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\bigg|_{y \to 0} = H_1(x, t) \tag{4}$$

даны вдоль осей Y и X. Далее мы предположим, что

$$u(x, y, 0) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}\bigg|_{t \to 0} = 0. \tag{5}$$

Обозначим в дальнейшем

$$u(0, y, t) = N(y, t) \tag{6}$$

и

$$u(x, 0, t) = N_1(x, t). \tag{7}$$

Поступая подобно тому, как делалось в работе VI [1], мы и получим решение.

Для пространства I имеем:

$$u(x, y, t) = 0, \tag{8}$$

а для пространства II:

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_x^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}} \frac{H(y-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}; \quad \tau_1 = c\tau. \tag{9}$$

Аналогично работе VI мы переводим уравнение (1) в нижнее пространство относительно y, но вследствие (2) интегрируем по y от $y=0$ до $y=\infty$. При этом появляются величины H_1 и N_1. В этом пространстве, как в работе I [2], мы получаем решение и при возвращении в верхнее пространство находим полное решение.

Таким же образом мы переходим в нижнее пространство относительно x. При этом получаем решение, равное предыдущему. В этом случае меняются x, H_1, N_1 на y, H и N. (Не надо забывать, что при этом пространство II переходит в II'.)

Приравнивание двух подобных решений дает нам известные соотношения. Употребляя подобную перемену, мы получим для пространства II':

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_y^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}} \frac{H_1(x-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}} = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}} \frac{N_1(x-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}} - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_y^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}} \frac{H_1(x-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Вследствие сложности формул мы в дальнейшем приведем лишь окончательные результаты, причем означенную перемену мы должны себе представить.

Для пространства III получаем:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = &-\frac{1}{\pi}\int\limits_x^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}} \frac{H(y-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}} - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_y^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}} \frac{H_1(x-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}} - \\ &- \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^{ct} d\tau_1 \int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}} \frac{N_1(x-s, t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

и наконец для пространства IV имеем:

$$u(x,y,t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{ct}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{y}\frac{H(y-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x}^{\sqrt{y^2+x^2}}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-x^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-x^2}}\frac{H(y-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-x^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sqrt{y^2+x^2}}^{ct}d\tau_1\int\limits_{x}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}}\frac{H_1(s-x,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\sqrt{y^2+x^2}}^{ct}d\tau_1\int\limits_{x}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}}\frac{N_1(s-x,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{y}^{\sqrt{y^2+x^2}}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}}\frac{H_1(x-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{y}^{\sqrt{y^2+x^2}}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}}\frac{N_1(x-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sqrt{y^2+x^2}}^{ct}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{x}\frac{H_1(x-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\sqrt{y^2+x^2}}^{ct}d\tau_1\int\limits_{-\sqrt{\tau_1^2-y^2}}^{x}\frac{N_1(x-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}};\quad \tau_1=c\tau. \tag{12}$$

В (8)—(12) необходимо вставить значения N и N_1, выраженные через H и H_1. Эти значения будут:

$$N(y,t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{ct}d\tau_1\int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1}\frac{H(y-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-s^2}};\quad \underline{\underline{y\geqslant ct}} \tag{13}$$

и

$$N(y,t)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{y}^{ct}d\tau_1\int\limits_{0}^{\sqrt{\tau_1^2-y^2}}\frac{H_1(s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-y^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{y}^{ct}d\tau_1\int\limits_{y}^{\tau_1}\frac{H(s-y,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-s^2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{y}d\tau_1\int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1}\frac{H(y-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-s^2}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{y}^{ct}d\tau_1\int\limits_{-\tau_1}^{y}\frac{H(y-s,\ t-\tau)\,ds}{\sqrt{\tau_1^2-s^2}};\quad \tau_1=c\tau;\quad \underline{\underline{y\leqslant ct.}} \tag{14}$$

Значения для N_1 получим через означенную перемену.

Уравнения (8)—(12) удовлетворяют уравнению (2), непрерывно переходят одно в другое и дают на осях X и Y значения H_1 и H, как это и должно быть. При этом надо иметь в виду, что H и H_1 вполне независимы друг от друга, что вполне понятно.

Институт математики и механики.
Ленинградский университет.

Поступило
29 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XV, № 2 (1937). [2] В. С. Игнатовский, ДАН, II, № 1 (1935).