Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

И. И. ПРИВАЛОВ

РАЗЛИЧНЫЕ КЛАССЫ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СВЯЗИ С ИХ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 I 1938)

1. Будем обозначать через $u(P)=u(r, \Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_{p-1})$ субгармоническую функцию внутри шара с центром в начале координат, радиуса 1, пространства $p \geqslant 2$ измерений. Рассматриваются три класса субгармонических функций, определяемых следующими условиями:

$$\int u^+(r, \Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_{p-1})\, d\omega < K, \; r<1 \quad (\text{A});$$

$\int\limits_e u^{+q}(r, \Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_{p-1})\, d\omega,\ q \geqslant 1$,—равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r<1$ (B_q);

$\int\limits_e |u(r, \Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_{p-1})|\, d\omega$ — равномерно абсолютно непрерывная функция множества e вблизи $r=1$ (C).

В этих условиях (A), (B_q) и (C) мы через $d\omega$ обозначаем элемент единичной сферы, через e любое измеримое множество точек единичной сферы. Как было мной ранее доказано [1], всякая субгармоническая функция $u(P)$ класса A (значит, и подавно функция класса B_q или C) имеет радиальные предельные значения $u(Q)$ почти всюду на единичной сфере, и эти предельные значения $u(Q)$ образуют суммируемую функцию. В настоящей работе доказываются следующие предложения:

I. Необходимые и достаточные критерии принадлежности функции $u(P)$ к классам A, B_q, C будут соответственно:

a) $\lim\limits_{r\to 1} \int u^+(P)\, d\omega =$ конечному числу или, что то же,

$\lim\limits_{r\to 1} \int |u(P)|\, d\omega =$ конечному числу; (A)

входящие в эти условия пределы, вообще говоря, не совпадают соответственно с числами $\int u^+(Q)\, d\omega$ и $\int |u(Q)|\, d\omega$, будучи не меньше этих чисел;

b) $\lim\limits_{r\to 1} \int u^{+q}(P)\, d\omega = \int u^{+q}(Q)\, d\omega$ (B_q);

c) $\lim\limits_{r\to 1} \int |u(P)|\, d\omega = \int |u(Q)|\, d\omega$ (C).

II. Основная теорема. *Для того чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала одному из классов* A, B_q, C, *необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшая гармоническая мажоранта принадлежала этому классу.*

Вследствие этой теоремы задача об аналитических представлениях субгармонических функций классов A, B_q, C приводится к изучению аналитических представлений гармонических функций, принадлежащих классам A, B_q, C.

Как было мной ранее доказано [1], гармоническая функция класса A характеризуется ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона-Стильтьеса общего вида, гармоническая функция класса C—ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона. Наконец в этой работе доказано, что гармоническая функция класса B_q характеризуется ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона-Стильтьеса частного вида, т. е. когда под знаком дифференциала стоит разность абсолютно непрерывной функции множества* и неотрицательной функции множества с производной, равной нулю почти всюду на единичной сфере. Наконец функция класса B_q, $q > 1$, может быть охарактеризована неравенством:

$$\int u^{+q}(P)\,d\omega < K, \quad r < 1.$$

Полагая в частности $u(P) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$—аналитическая функция внутри единичного круга, получим соответствующие классы A, B_q, C аналитических функций.

2. Будем обозначать через $u(P) = u(r, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_{p-1})$ логарифмически-субгармоническую функцию внутри единичного шара пространства $p \geqslant 2$ измерений. Назовем классом H_δ класс логарифмически-субгармонических функций, определяемых следующим условием:

$\int\limits_e u^\delta(r, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_{p-1})\,d\omega$—равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r < 1$.

В этом условии через $d\omega$ мы обозначаем элемент единичной сферы, через e—любое измеримое множество точек единичной сферы, через $\delta > 0$—некоторое постоянное число.

В силу доказанной мной ранее теоремы [1] всякая субгармоническая функция $u(P)$ класса H_δ имеет радиальные предельные значения $u(Q)$ почти всюду на единичной сфере, причем $u^\delta(Q)$ образуют суммируемую функцию.

Здесь выводится необходимый и достаточный критерий принадлежности функции $u(P)$ классу H_δ:

$$\lim_{r\to 1} \int u^\delta(P)\,d\omega = \int u^\delta(Q)\,d\omega.$$

Далее выводится аналитическое представление функций класса H_δ, их характеризующее:

$$u(P) = \exp - \int G(P; T)\,d\mu(T) \cdot \exp \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2)\ln u(Q)}{(1+r^2-2r\cos\gamma)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega \times$$

$$\times \exp - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos\gamma)^{\frac{p}{2}}}\,d\psi_2(e),$$

* Производная $u(Q)$ этой абсолютно непрерывной функции суммируема вместе с $u^{+q}(Q)$.

где $\ln u(Q)$ и $u^\delta(Q)$ суммируемы; $\psi_2(e)\geqslant 0$ и имеет производную, равную нулю почти всюду на единичной шаровой поверхности; $G(P;T)$—функция Грина для единичного шара, $\mu(T)$—распределение масс, порожденных функцией $\ln u(P)$.

Наконец доказывается другой необходимый и достаточный критерий принадлежности функции $u(P)$ классу H_δ:

$$\int u^\delta(P)\,d\omega < K,\ r<1.$$

Полагая в частности $u(P)=|f(z)|$, где $f(z)$—аналитическая функция внутри единичного круга, получаем известный класс H_δ аналитических функций, введенный Риссом.

3. Условимся называть интегралом типа Коши-Стильтьеса выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\Theta)}{x-z},\tag{1}$$

где $x=e^{i\Theta}$, $z\neq x$, $\psi(\Theta)=\psi_1(\Theta)+i\psi_2(\Theta)$, причем $\psi_1(\Theta)$ и $\psi_2(\Theta)$—любые функции с ограниченными изменениями на сегменте $[0,2\pi]$.

Выражение (1) назовем интегралом Коши-Стильтьеса, если его предельные значения изнутри окружности C, $|x|=1$, по всем некасательным путям совпадают с производной $\psi'(\Theta)$ почти всюду на окружности.

Теорема 1. *Условия* $\int_0^{2\pi} x^n d\psi(\Theta)=0\ (n=1,2,\ldots)$ *необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши-Стильтьеса* (1) *обращался в интеграл Коши-Стильтьеса.*

Теорема 2. *Условия* $\int_0^{2\pi} x^n\,d\psi(\Theta)=0\ (n=1,2,\ldots)$ *необходимы и достаточны для того, чтобы соответствующий интеграл Пуассона-Стильтьеса изображал голоморфную функцию внутри единичного круга.*

Теорема 3. *Если* $\int_0^{2\pi} x^n d\psi(\Theta)=0\ (n=1,2,\ldots)$, *то* $\psi(\Theta)$ — *функция абсолютно непрерывная.*

Из этих теорем заключаем:

если голоморфная функция $f(z)$ внутри единичного круга представима при помощи одной из четырех формул:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(x)\,dx}{x-z}\ \text{(интеграл Коши)},$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\Theta-\varphi)}\,d\Theta\ \text{(интеграл Пуассона)},$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\Theta-\varphi)}\,d\psi(\Theta)\ \text{(интеграл Пуассона-Стильтьеса)},$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\Theta)}{x-z}\ \text{(интеграл Коши-Стильтьеса)},$$

то эта функция представима посредством трех остальных формул. Отсюда в частности аналитические функции класса H_1 характеризуются их представимостью интегралом Коши или, что то же, граничными условиями ([2]):

$$\int_C f(x)\, x^n dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. В заключение этой работы устанавливается формула:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x d\psi(\Theta)}{x - z} \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x d\psi(\Theta)}{x - x_0} \pm \frac{1}{2}\psi'(\Theta_0),$$

которая имеет место почти всюду на окружности $C, |x| = 1$, при стремлении точки z по любому некасательному пути к точке $x_0 = e^{i\Theta_0}$ окружности C (знак $+$ для случая, когда z внутри C, $-$ для случая, когда z вне C). Интеграл правой части определен как особый.

Подробные доказательства результатов этой работы будут опубликованы мной в ближайшее время.

Поступило
25 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Привалов, ДАН, XVII, № 1 (1938); Матем. сб. (1938). [2] И. И. Привалов, Изв. Сарат. ун-та (1918).