Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 5

МАТЕМАТИКА

О. К. ЖИТОМИРСКИЙ

О НЕИЗГИБАЕМОСТИ ОВАЛОИДОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 IX 1939)

С. Э. Кон-Фоссен доказал следующую теорему (1):

два овалоида могут быть изометричными только в том случае, когда они конгруэнтны.

Hopf и Samelson, сохраняя общую схему Кон-Фоссена, упростили доказательство наиболее трудных теорем (2).

В настоящей работе я даю новое доказательство тех же теорем. Применяемый метод кажется мне более прямым и элементарным и кроме того приложимым ко многим аналогичным вопросам.

Схема Кон-Фоссена может быть изложена в нескольких строках. Предполагая сходственные точки изометричных овалоидов S, S' отнесенными к одной и той же точке плоскости параметров u, v, мы будем иметь

$$E'=E,\quad F'=F,\quad G'=G.$$

Относительно разностей

$$L'-L=\lambda,\quad M'-M=\mu,\quad N'-N=\nu$$

можно сделать два предположения:

a) они равны нулю для любой пары сходственных точек; тогда, по теореме Бонне, овалоиды S, S' конгруэнтны;

b) они не равны одновременно нулю хотя бы для одной пары сходственных точек; легко убедиться, что в этом случае уравнение

$$\lambda\, du^2+2\mu\, du\, dv+\nu\, dv^2=0 \tag{1}$$

определяет на каждом из овалоидов S, S' два вещественных поля направлений (характеристические направления) за исключением тех точек, где

$$\lambda=\mu=\nu=0$$

(точки конгруэнтности).

Далее доказываются следующие теоремы:

A) *точки конгруэнтности изолированы*;

B) *индекс Пуанкаре относительно каждого поля характеристических направлений ни для какой точки конгруэнтности не может быть* >0.

Но при условии A сумма всех индексов должна была бы, по теореме Пуанкаре, равняться 4, а это противоречит теореме B. Следовательно предположение b) невозможно. Но предположение a) приводит к результату Кон-Фоссена.

Предмет моей работы и составляет новое доказательство теорем А и В в предположении b).

Вычтем из уравнений Гаусса и Кодацци для овалоида S' те же уравнения для овалоида S. Принимая во внимание равенство

$$L' = L + \lambda, \quad M' = M + \mu, \quad N' = N + \nu,$$

получим:

$$\begin{gathered} N\lambda + L\nu - 2M\mu + \lambda\nu - \mu^2 = 0; \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\partial\mu}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\lambda + \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]\mu + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\nu = 0; \\ \frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{\partial\nu}{\partial u} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\lambda + \left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\mu + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\nu = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Мы предположим овалоиды S, S' аналитическими. Тогда, если бы λ, μ, ν были тождественно равны нулю в окрестности какой-нибудь точки (u_0, v_0), то они были бы равны нулю для любой пары соответственных точек овалоидов S, S', что противоречит предположению b). Поэтому в любой точке (u_0, v_0) имеем

$$\lambda = \lambda_n + \lambda_{n+1} + \ldots, \quad \mu = \mu_n + \mu_{n+1} + \ldots, \quad \nu = \nu_n + \nu_{n+1} + \ldots,$$

где λ_k, μ_k, ν_k — формы степени k относительно $u - u_0$, $v - v_0$, и по крайней мере одна из форм λ_n, μ_n, ν_n не равна нулю тождественно.

Для простоты письма положим $u_0 = v_0 = 0$.

Из уравнений (2) для λ, μ, ν получаем для членов наинизшей степени λ_n, μ_n, ν_n более простые уравнения

$$N_0\lambda_n + L_0\nu_n - 2M_0\mu_n = 0, \quad \frac{\partial\lambda_n}{\partial v} - \frac{\partial\mu_n}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\mu_n}{\partial v} - \frac{\partial\nu_n}{\partial u} = 0, \tag{3}$$

где L_0, M_0, N_0—значения L, M, N в точке (0, 0). Так как форма (L_0, M_0, N_0) определенная, то с помощью вещественного линейного преобразования параметров можно сделать $L_0 = N_0$, $M_0 = 0$. Тогда уравнения (3) примут вид:

$$\lambda_n + \nu_n = 0; \quad \frac{\partial\mu_n}{\partial u} = \frac{\partial\lambda_n}{\partial v}; \quad \frac{\partial\lambda_n}{\partial u} = -\frac{\partial\mu_n}{\partial v}.$$

Таким образом, функция $w = \mu_n + i\lambda_n$ от переменной $z = u + iv$ удовлетворяет условиям Коши—Римана. Но так как эта функция есть форма n-ой степени от u, v, то мы получаем просто

$$w = cz^n, \tag{4}$$

где c—постоянная. Можно предположить параметры выбранными так, что $c = 1$.

Предположим теперь, что точка (0,0) есть точка конгруэнтности, т. е. что $n \geqslant 1$, и докажем теоремы А и В.

Имеем разложение

$$\lambda\nu - \mu^2 = (\lambda_n\mu_n - \nu_n^2) + \ldots$$

Но так как, в силу (4),

$$\lambda_n = -\nu_n = I(z^n), \quad \mu_n = R(z^n),$$

то

$$\lambda_n\nu_n - \mu_n^2 = -|z|^{2n}.$$

Отсюда видно, что в точках (u, v), достаточно близких к $(0,0)$, но отличных от нее, $\lambda\nu - \mu^2 \neq 0$, а потому невозможно и $\lambda = \mu = \nu = 0$. Значит, точка (0,0)—изолированная точка конгруэнтности. Это—теорема А.

Рассмотрим поля направлений, определяемых уравнением

$$\lambda_n du^2 + 2\mu_n du\, dv + \nu_n dv^2 = 0. \tag{5}$$

В достаточно малой окрестности точки (0, 0) эти поля сколь угодно мало отличаются от полей характеристических направлений, определяемых уравнением (1). Следовательно индексы точки (0, 0) не меняются при замене полей (1) полями (5). Но последние легко определить. В силу (4), уравнение (5) можно написать в виде

$$I(z^n dz^2) = 0, \quad \text{или} \quad z^n dz^2 - \bar{z}^n d\bar{z}^n = 0, \quad \text{или} \quad z^{\frac{n}{2}} dz \mp \bar{z}^{\frac{n}{2}} d\bar{z} = 0.$$

Обозначим углы, образуемые элементом dz и радиусом-вектором z с осью u, через α и θ. Имеем (если возьмем в последнем уравнении верхний знак):

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{dz}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{n}{2}} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = -\frac{n}{2}\theta.$$

Приращению 2π угла θ соответствует поэтому приращение $-n\pi$ угла α. Следовательно индекс равен $-n$ $\left(\text{то же получим, если возьмем нижний знак, так как } \alpha \text{ изменится лишь на постоянное слагаемое } \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $n \geqslant 1$, то $-n \leqslant -1$. Отсюда следует теорема B.

Как известно, две незамкнутые поверхности положительной кривизны могут быть изометричны, не будучи равны. В этом случае точки конгруэнтности могут существовать, и представляет интерес составить себе представление о сети интегральных кривых полей (1) вблизи точек конгруэнтности. Этого можно достигнуть, интегрируя приближенные поля (4). Получим два семейства кривых

$$z^{\frac{n+3}{2}} \pm \bar{z}^{\frac{n+3}{2}} = c,$$

т. е.

$$R\left(z^{\frac{n+3}{2}}\right) = a, \quad I\left(z^{\frac{n+3}{2}}\right) = b,$$

вид которых хорошо известен.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
17 IX 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Cohn-Vossen, Gött. Nachr., 127—134 (1927). [2] Hopf u. Samelson, Math. Z., 43, H. 5 (1938).