Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

В. ШМУЛЬЯН

О РЕГУЛЯРНО ЗАМКНУТЫХ И СЛАБО КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА (B)

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 I 1938)

Настоящая заметка является дальнейшим развитием результатов, полученных В. Гантмахер и автором в их совместной работе [1]. Мы приведем ответ на ряд вопросов, поставленных в упомянутой работе.

1. Пусть в дальнейшем E обозначает пространство типа (B) [2]. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ элементов E стремится к x_0 в среднем, если

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \leqslant f(x_0) \leqslant \overline{\lim}\, f(x_n) \text{ для всех } f \in \overline{E}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы множество $\mathfrak{M} \subset E$ было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность $\{x_n\}$ элементов из $\mathfrak{M}$ сходилась в среднем к некоторому элементу из E.*

Доказательство. Необходимость условия тривиальна. При доказательстве достаточности, не уменьшая общности, можно считать, что E сепарабельно. Пусть $\{f_m\}$ — слабо плотная в $\overline{E}$ последовательность линейных функционалов. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$. Очевидно, что эта последовательность всегда содержит некоторую подпоследовательность $\{x_{n_\nu}\}$, для которой существует $\lim f(x_{n_\nu})$ для каждого $f = f_m$.

Положим $y_\nu = x_{n_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. По условию существует элемент x_0, к которому стремится в среднем последовательность $\{y_\nu\}$.

Покажем, что $y_\nu \overset{\text{сл.}}{\to} x_0$. Допустим противное; тогда существует функционал $f_0 \in \overline{E}$ такой, что последовательность $\{f_0(y_\nu)\}$ содержит подпоследовательность $\{f_0(y_{\nu_k})\}$, имеющую конечный или бесконечный предел, отличный от $f_0(x_0)$. Положим $z_k = y_{\nu_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда получим

$$\lim_k f_m(z_k) = f_m(x_0) \quad (m = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \lim_k f_0(z_k) \neq f_0(x_0). \tag{1}$$

По условию существует элемент x_0', к которому стремится в среднем последовательность $\{z_k\}$. В силу (1) будем иметь

$$f_m(x_0) = \lim_k f_m(z_k) = f_m(x_0') \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

и

$$f_0(x'_0) = \lim_k f_0(z_k) \neq f_0(x_0). \tag{3}$$

Но так как последовательность $\{f_n\}$ слабо плотна в $\overline{E}$, то из (2) следует, что $f(x_0) = f(x'_0)$ для всех $f \in \overline{E}$, что противоречит (3).

Теорема доказана.

Частный случай этой теоремы, когда $\mathfrak{M}$ есть единичная сфера E, был установлен ранее ([1]) некоторыми окольными рассуждениями.

2. Теорема 2. *Для того чтобы сепарабельное подпространство $F \subset \overline{E}$ было регулярно замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы его единичная сфера была слабо компактна в нем (в смысле слабой сходимости функционалов).*

Доказательство. Пусть F — сепарабельное регулярно замкнутое подпространство $\overline{E}$. Обозначим через G совокупность тех элементов $x \in E$, для которых $f(x) = 0$ при любом $f \in F$. Согласно теореме М. Г. Крейна и автора F является сопряженным пространством к фактор-пространству $\frac{E}{G}$. Так как F сепарабельно, то и $\frac{E}{G}$ тоже сепарабельно, а следовательно единичная сфера в F слабо компактна в смысле слабой сходимости функционалов относительно пространства $\frac{E}{G}$. Остается заметить, что слабая сходимость функционалов из F относительно пространства $\frac{E}{G}$ эквивалентна слабой сходимости относительно пространства E.

Для доказательства достаточности отметим сперва следующий общий факт.

Каково бы ни было сепарабельное подпространство $H \subset \overline{E}$, всегда найдется сепарабельное подпространство $G \subset E$ такое, что $H \subset \overline{G}$.

Простое доказательство этого факта мы опускаем.

Пусть теперь f_0 — произвольный линейный функционал вне F. Выберем в качестве H линейную оболочку на F и f_0. Тогда $F \subset H \subset \overline{G}$. Если F удовлетворяет условию теоремы, то оно слабо замкнуто (в смысле слабой сходимости функционалов в G). Так как G сепарабельно, то по известной теореме Банаха ([3]) F регулярно замкнуто в $\overline{G}$, и следовательно найдется такой элемент $x_0 \in G$, что $f(x_0) = 0$ для всех $f \in F$ и $f_0(x_0) = 1$, ибо $f_0 \in \overline{G} - F$. Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что условие теоремы 2 можно заменить условием, что каждой ограниченной последовательности $\{f_n\} \subset F$ отвечает некоторый $f_0 \in F$, для которого

$$\underline{\lim}\, f_n(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \overline{\lim}\, f_n(x)$$

для всех $x \in E$.

3. Теперь мы в состоянии доказать следующее предложение.

Теорема 3. *Слабая компактность единичной сферы эквивалентна каждому из следующих условий:*

I. *Любая система уравнений $f_\nu(x) = C_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) имеет решение y с нормой $|y| \leqslant M$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$\left| \sum_1^n C_\nu \cdot \lambda_\nu \right| \leqslant M \cdot \left| \sum_1^n f_\nu \cdot \lambda_\nu \right|$$

для любых λ_ν, n.

II. *Каждое замкнутое сепарабельное подпространство* $\Gamma \subset \overline{E}$ *регулярно замкнуто.*

Доказательство. Необходимость этих условий уже известна (¹). Для доказательства достаточности заметим сперва, что условие I влечет за собой условие II. Действительно, пусть F — замкнутое сепарабельное подпространство E и $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ — плотная последовательность в F. Пусть $f_0 \in \overline{E}$ — произвольный функционал, не принадлежащий F. Образуем систему уравнений:

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=0,\ f_2(x)=0, \ldots$$

Тогда благодаря I эта система имеет решение x_0. Это и доказывает, что F регулярно замкнуто.

Таким образом остается показать, что из II следует слабая компактность единичной сферы в E.

Пусть $\{f_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность элементов из $\overline{E}$. Построим линейную замкнутую оболочку F этой последовательности. Тогда по условию F регулярно замкнуто. Следовательно $F=\left(\frac{\overline{E}}{G}\right)$. Так как любое замкнутое подпространство $F_1 \subset F$ регулярно замкнуто относительно $\overline{E}$, то оно регулярно замкнуто и относительно $F=\left(\frac{\overline{E}}{G}\right)$, а следовательно $\frac{E}{G}$ регулярно *. Отсюда получаем регулярность F. Поэтому единичная сфера F слабо компактна (¹) (в смысле слабой сходимости элементов). Принимая во внимание, как было построено F, мы приходим к выводу, что единичная сфера в $\overline{E}$ слабо компактна (в смысле слабой сходимости элементов).

А отсюда на основании теоремы В. Гантмахер и автора (¹) единичная сфера в E слабо компактна.

Одесский государственный университет.

Поступило 24 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Гантмахер и В. Шмульян, ДАН, XVII, № 3, 91—94 (1937). [2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires (1932). [3] S. Banach, loc. cit., стр. 124. [4] S. Banach, loc. cit., стр. 132.

* Ибо, если любое замкнутое подпространство $\overline{E}$ регулярно замкнуто, то E регулярно (⁴).