Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНО-АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 I 1938)

Функционал $I(x)$ назовем частично-аддитивным, если соотношение аддитивности: $I(x+y)=I(x)+I(y)$ имеет место только для некоторых пар элементов x, y, удовлетворяющих определенному условию. Частично-аддитивные и непрерывные функционалы представляют собой непосредственное обобщение линейных функционалов.

В настоящей заметке указываются общие формы некоторых непрерывных и частично-аддитивных (в разном смысле) функционалов в пространствах: L — интегрируемых по Lebesgue'у функций $x(t)$, определенных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, и l — числовых последовательностей $x=\{\xi_i\}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty.$$

Решение задач этого рода во многих случаях стало возможным благодаря принадлежащей проф. Л. В. Канторовичу теории регулярных полуупорядоченных пространств ([1]), результаты и аппарат которой (применительно к пространству L) существенно использованы при доказательстве нижеследующих теорем.

Рассмотрению функционалов в пространстве L удобно предпослать следующую (имеющую и самостоятельное значение) теорему.

Теорема 1. а) Если функционал

$$I(x)=\int_a^b f[x(t), t]\,dt \tag{*}$$

непрерывен в L, то функция $f(p, t)$ $(-\infty<p<+\infty,\ a\leqslant t\leqslant b)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. При любом фиксированном значении p, $f(p, t) \in L$.
2. При любом фиксированном значении p

$$|f(p, t)| \leqslant K|p| + \Phi(t) \text{ почти везде } (K=\text{const},\ \Phi(t)\in L).$$

3. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует δ такое, что из неравенства

$$|p'-p''|<\delta \qquad (p_1\leqslant p', p''\leqslant p_2)$$

следует $|f(p', t)-f(p'', t)|<\varepsilon\cdot R(t)$ почти везде, где $R(t)$ — «регулятор равномерной непрерывности» — интегрируемая функция, зависящая только от выбора чисел p_1 и p_2.

b) Если функция $F(p, t)$ непрерывна по p и удовлетворяет условиям 1 и 2, то функционал

$$I(x)=\int_a^b F[x(t), t]\,dt \qquad (**)$$

непрерывен в L.

c) Всякий непрерывный в L функционал, допускающий представление (*), может быть представлен в виде (**), причем функция $f(p, t)$ совпадает почти везде, при всяком фиксированном p, с функцией $F(p, t)$.

Укажем основные моменты доказательства теоремы.

a) Необходимость условия 1 очевидна. Условие 2 равносильно следующему: существует константа K, удовлетворяющая требованию

$$\sup_p \{\max[|f(p, t)|, K|p|]-K|p|\}\in L.$$

Рассуждая от противного, мы должны предположить, что при всех $i=1, 2, \ldots$ множества функций A_i, зависящих от параметра p,

$$A_i=\{\max[|f(p, t)|, K_i|p|]-K_i|p|\} \qquad (K_i=2^i)$$

неограничены (термины: «ограниченное множество», «supremum», «infimum» понимаются в смысле теории линейных полуупорядоченных пространств).

В виду регулярности пространства L из множеств A_i можно выделить по конечному числу функций:

$$\varphi_i^{(1)}(t), \varphi_i^{(2)}(t), \ldots \varphi_i^{(n_i)}(t) \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

с соблюдением следующих условий:

a) $|f(p_i^{(k)}, t)|=K_i|p_i^{(k)}|+\varphi_i^{(k)}(t)$ $(t\in e_i^{(k)})$ множества $e_i^{(k)}$ — без общих точек, $\sum e_i^{(k)}=E$, $\operatorname{mes} E>0$.

b) $\varphi_i^{(k)}(t)\geqslant f(t)$ $(t\in e_i^{(k)})$, где $f(t)$ — неинтегрируемая на множестве E функция.

Могут представиться две возможности:

1) Ряд $\displaystyle\sum_{i, k}|p_i^{(k)}|\cdot\operatorname{mes} e_i^{(k)}<+\infty$ и 2) $\displaystyle\sum_{i, k}|p_i^{(k)}|\cdot\operatorname{mes} e_i^{(k)}=+\infty$.

В первом случае положим $x(t)=p_i^{(k)}$ на множестве $e_i^{(k)}$ и нулю в прочих точках, $x(t)\in L$, но

$$\int_E|f[x(t), t]|\,dt=\sum_{i, k}\int_{e_i^{(k)}}|f(p_i^{(k)}, t)|\,dt\geqslant\int_E f(t)\,dt=+\infty,$$

что невозможно.

Во втором случае можно указать множества $\mathscr{E}_{i_s}^{(k)}\subset e_{i_s}^{(k)}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_{i_s}}|p_{i_s}^{(k)}|\cdot\operatorname{mes}\mathscr{E}_{i_s}^{(k)}=\frac{1}{2^{i_s}} \qquad (s=1, 2, \ldots).$$

Положим $x(t) = p_{i_s}^{(k)}$ на множестве $\mathscr{E}_{i_s}^{(k)}$ и нулю в прочих точках, $x(t) \in L$, но

$$\int\limits_{\mathscr{E}=\Sigma \mathscr{E}_{i_s}^{(k)}} |f[x(t), t]|\, dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n_{i_s}} \int\limits_{\mathscr{E}_{i_s}^{(k)}} |f(p_{i_s}^{(k)}, t)|\, dt \Big) > \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n_{i_s}} K_{i_s} |p_i^{(k)}| \cdot \operatorname{mes} \mathscr{E}_{i_s}^{(k)} \Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \Big(2^{i_s} \sum_{k=1}^{n_{i_s}} |p_{i_s}^{(k)}| \cdot \operatorname{mes} \mathscr{E}_{i_s}^{(k)} \Big) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{i_s} \cdot \frac{1}{2^{i_s}} = +\infty,$$

что опять приводит к противоречию.

Для доказательства условия 3 разложим промежуток (p_1, p_2) на 2^n равных частей, множество $\{ f(p, t) \}$, где p принадлежит одному из частичных промежутков, имеет supremum и infimum, разность которых обозначим через $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots 2^n)$, положим $\psi_n(t) = \max\limits_k \{ \varphi_k(t) \}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Последовательность неотрицательных функций $\psi_n(t)$ монотонно стремится к нулю (что можно показать, опираясь на свойства регулярных пространств и применяя теорему Егорова), тогда существует (по теореме о сходимости в регулярных пространствах) интегрируемая функция $R(t)$ такая, что $|\psi_n(t)| \leqslant \varepsilon \cdot R(t)$ почти везде при $n \geqslant N_\varepsilon$ (ε — сколь угодно мало); отсюда легко вытекает 3.

b) Доказывается с помощью леммы:

Если $F(p, t)$ непрерывна по p и удовлетворяет условиям 1, 2 и 3, то $|F[x(t), t]| \leqslant K|x(t)| + \Phi(t)$ почти везде ($K = \mathrm{const}$, $\Phi(t) \in L$).

c) Вытекает из b) с помощью следующей леммы:

Если $f(p, t)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 3, то существует непрерывная по p функция $F(p, t)$, совпадающая с $f(p, t)$ почти везде при всяком фиксированном p.

Замечание. Если функционал (*) непрерывен в L, то

$$I(x) = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{e_i} f(p_i, t)\, dt,$$

где $\ldots < p_{-1} < p_0 < p_1 < \ldots$ бесконечная в обе стороны последовательность чисел, $p_{i+1} - p_i < \alpha$, $e_i = \mathscr{E}_t [p_i \leqslant x(t) < p_{i+1}]$ — лебеговы множества функции $x(t)$.

Теорема 2. Общий вид непрерывного в L функционала, частично-аддитивного в том смысле, что $I(x + y) = I(x) + I(y)$, если $x(t) \cdot y(t) = 0$ $(x = x(t),\ y = y(t))$ дается формулой

$$I(x) = \int\limits_a^b F[x(t), t]\, dt,$$

где $F(p, t)$ — непрерывна по p и удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 1, a) и дополнительному условию: 3) $F(0, t) = 0$ почти везде.

Пусть $x(t) = p$ на множестве (измеримом) e и нулю в прочих точках, положим $I(x) = \Phi_p(e)$; легко убедиться в том, что $\Phi_p(e)$ — аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества e. Существует интегрируемая функция $f(p, t)$, обладающая тем свойством, что

$$\int\limits_{e} f(p, t)\, dt = \Phi_p(e) \qquad (-\infty < p < +\infty);$$

повторяя рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 1, придем к заключению, что функция $f(p, t)$ необходимо удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 [теорема 1, а)] и существует функция $F(p, t)$, непрерывная по p, совпадающая с функцией $f(p, t)$ почти везде при всяком p. С другой стороны, непрерывный в L функционал

$$I_1(x) = \int\limits_{a}^{b} F[x(t), t]\, dt$$

равен $I(x)$, если $x(t)$ — конечнозначная функция. Действительно, пусть $x(t) = p_i\ (t \in e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, тогда по аддитивности функционала

$$I(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{p_i}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{e_i} f(p_i, t)\, dt,$$

но

$$I_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{e_i} F(p_i, t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{e_i} f(p_i, t)\, dt,$$

т. е.

$$I(x) = I_1(x);$$

далее, непрерывные в L функционалы, совпадающие для конечнозначных функций, тождественно равны. Условие 3) есть следствие аддитивности (в соответствующем смысле) функционала.

Теорема 3. Общий вид непрерывного в L функционала, частично-аддитивного в том смысле, что $I(x+y) = I(x) + I(y)$, если $x(t) \cdot y(t) \geqslant 0$ $(x = x(t),\ y = y(t))$, дается формулой

$$I(x) = \Phi_1[(x)_+] + \Phi_2[(x)_-],$$

где Φ_1 и Φ_2 — линейные функционалы, $(x)_+ = [x(t)]_+ = \max[0, x(t)]$, $(x)_- = [x(t)]_- = \max[0, -x(t)]$.

Теорема 4. Непрерывный в L функционал $I(x)$, частично-аддитивный в том смысле, что $I(x+y) = I(x) + I(y)$, если $x(t) \cdot y(t) \leqslant 0$ $(x = x(t),\ y = y(t))$, есть линейный функционал.

Теорема 5. Общий вид непрерывного в L функционала, обладающего свойствами:

a) $I(x+y) = I(x) + I(y)$, если $x(t) \cdot y(t) = 0$ $(x = x(t),\ y = y(t))$;

b) $I(x) = I(y)$, если $x(t+h) = y(t)$ [при этом предполагается, что за пределами основного промежутка (a, b) функции $x(t)$ и $y(t)$ равны нулю], дается формулой:

$$I(x) = \int\limits_{a}^{b} F[x(t)]\, dt,$$

где функция $F(p)$:

1) непрерывна,

2) $|F(p)| < K|p| + C$ (K и C — константы),

3) $F(0) = 0$.

Теорема 6. Общий вид непрерывного в l функционала, частично-аддитивного в том смысле, что $I(x+y)=I(x)+I(y)$, если элементы $x=\{\xi_i\}$ и $y=\{\eta_i\}$ удовлетворяют соотношению $\xi_i \cdot \eta_i = 0$ $(i=1, 2, \ldots)$, дается формулой

$$I(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(\xi_i),$$

где $x=\{\xi_i\}$, а функции $\varphi_i(\xi)$ удовлетворяют условиям:

1) $\varphi_i(\xi)$ непрерывны, причем $\varphi_i(0)=0$ $(i=1, 2, \ldots)$;

2) $|\varphi_i(\xi)|<K|\xi|+C_i$ при $|\xi|<\delta$ $\left(K \text{ и } \delta \text{ — константы}, \sum_{i=1}^{\infty}|C_i|<+\infty\right)$.

Наконец в пространстве l имеют место теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4, сформулированным для L.

Научно-исследовательский институт
математики и механики.
Ленинградский государственный университет.

Поступило
24 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kantorovitch, Rec. Math., **2 (44)**, 1.