Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Б. ГАГАЕВ

О ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 1 I 1938)

Нетрудно найти признаки нормальности семейств функций, удовлетворяющих однородному эллиптическому уравнению:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0, \tag{1}$$

$AC-B^2>0$, при условии, что A, B, C имеют частные производные первых трех порядков, D, E первых двух и F первого порядка.

При этих условиях L. Lichtenstein (1) доказал, что на функции, удовлетворяющие уравнению (1), можно обобщить теорему Harnack'а, а именно: он доказал, что, если $u_k(x,y)$—регулярные (т. е. непрерывные вместе с частными производными первых двух порядков) интегралы уравнения (1), всюду в односвязной области T, ограниченной кривой S с непрерывной кривизной, положительны, то из сходимости ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) \tag{2}$$

в одной точке внутри T следует равномерная сходимость всюду внутри односвязной области T', ограниченной контуром с непрерывной кривизной и лежащей вместе со своим контуром внутри T, к регулярному интегралу уравнения (1).

Эту теорему Lichtenstein доказал на основании леммы:

Если $u_m(x,y)$ есть какой-либо интеграл уравнения (1), удовлетворяющий тем же самым условиям, и x_1, y_1; x_2, y_2—какие-либо две точки, лежащие внутри T, то $\frac{1}{\lambda}u_m(x_1,y_1)>u_m(x_2,y_2)>\lambda u_m(x_1, y_1)$, причем λ—правильная положительная дробь, зависящая лишь от T, T' и от коэффициентов уравнения (1), но независящая от выбора интеграла $u_m(x,y)$. Отсюда сразу получается теорема:

Теорема 1. *Если $u_m(x,y)$ будут всюду в области T положительные (отрицательные) регулярные интегралы уравнения* (1), *то они образуют семейство, нормальное в этой области.*

Действительно, в этом случае любая последовательность значений функции в какой-либо точке x_1, y_1: $u_{m_1}(x_1,y_1)$, $u_{m_2}(x_1,y_1)$, …, $u_{m_k}(x_1,y_1)$, …

либо сходится либо расходится. В первом случае последовательность $u_{m_1}(x,y)$, $u_{m_2}(x, y)$, ... равномерно сходится всюду во всякой области T', во втором случае равномерно стремится к бесконечности, что и доказывает теорему.

Из этой теоремы легко вывести следующие признаки нормальности.

Теорема 2. *Если семейство регулярных интегралов эллиптического уравнения ограничено равномерно снизу (сверху) всюду в области T, то оно нормально в ней.*

Действительно, пусть интегралы $u_m(x,y)$ ограничены равномерно снизу всюду в T, т. е. всюду в T $u_m(x,y) > A$. Если $A \geqslant 0$, семейство нормально. Пусть $A < 0$ и пусть T'—какая-либо область, лежащая со своим контуром S' внутри T, тогда, если x_2, y_2—какая-либо внутренняя точка T', то

$$u_m(x_2, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S'} \frac{\partial H(x_2, y_2; x_1, y_1)}{\partial n} u_m(x_1, y_1)\, ds,$$

где $H(x_2, y_2; x_1, y_1)$—функция Грина сопряженного уравнения, обращающаяся в нуль на контуре S'. Lichtenstein (²) доказал, что на контуре S' $\frac{\partial H(x_2, y_2; x_1, y_1)}{\partial n} > \alpha > 0$, где α не зависит ни от точки x_1, y_1, ни от точки x_2, y_2.

Следовательно функция

$$u(x_2, y_2) = \frac{-1}{2\pi l \alpha} \int\limits_{S'} \frac{\partial H(x_2, y_2; x_1, y_1)}{\partial n} A\, ds,$$

где l—длина S', является регулярным интегралом уравнения (1), всюду в T' удовлетворяющим условию:

$$u(x_2, y_2) > -A.$$

Но тогда семейство $u_m(x,y) + u(x,y)$ всюду в T' положительно, откуда и следует нормальность семейства $u_m(x,y)$ в T', а на основании свойств нормальных семейств и всюду в T.

Теорема 3. *Если семейство регулярных интегралов эллиптического уравнения всюду в какой-либо области T не принимает какого-либо значения α, то оно нормально всюду в этой области.*

Действительно, всякая бесконечная последовательность семейства $u_{m_1}(x,y), u_{m_2}(x,y), \ldots$ содержит бесконечное множество функций, бо́льших α, или бесконечное множество функций, меньших α. В первом случае имеется бесконечное множество функций, ограниченных снизу, во втором,—ограниченных сверху. В том и другом случае семейство нормально.

Доказанные здесь теоремы нельзя обобщить на функции, удовлетворяющие гиперболическому уравнению. Действительно, семейство

$$\varphi_m(x,y) = m(x^2 + y^2) + 1 \quad (m > 0)$$

всюду положительно и удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Однако в любой области, содержащей точку 0,0, оно не может быть нормально, так как в точке 0,0 любая последовательность сходится к 1, а в прочих точках бесконечно возрастает. Тот же пример показывает, что нельзя обобщить и теоремы 2 и 3 на интегралы гиперболического уравнения.

Гармонические и полигармонические функции не могут всюду удовлетворять какому-либо признаку нормальности, не обращаясь в постоянную величину. Для общего случая эллиптического уравнения это неверно. Так, функции $A \cos x$ удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

и всюду в плоскости остаются ограниченными.

Казанский институт математики и механики.

Поступило
9 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXXIII, 201—211 (1912).
[2] Там же.