Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

В. С. ЛЮКШИН

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 I 1938)

1. В работе об изгибании поверхностей вращения отрицательной кривизны с особой точкой [1] нами рассмотрена поверхность с параболическим краем. Аналогично исследованиям об изучении регулярных поверхностей [2] мы изучим теперь изгибание той же поверхности вращения отрицательной кривизны с особой конической точкой с одной стороны, но с обыкновенным краем с другой.

Пусть в плоскости (z, r) дуга OA определяется уравнением:

$$r = r\,(z) = az + \varphi\,(z), \tag{1}$$

где $a > 0$, $\varphi\,(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) > 0$, $\varphi'(z) > 0$, $\varphi''(z) > 0$, $\varphi\,(z_0) > 0$, $\varphi'(z_0) = \theta > 0$; $0 \leqslant z \leqslant z_0$; $r_0 = a\,z_0 + \varphi(z_0)$; $r_0' = a + \theta$. Обозначим поверхность вращения этой линии около оси Oz через S. Ищем поверхность S_1, полученную из S изгибанием, с параметром изгибания t:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z + t\,Z\,(z, v) \\ r_1 &= r(z) + t\,R\,(z, v) \\ v_1 &= v + t\,V\,(z, v) \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Искомые функции Z, R, V разлагаются в ряд Фурье [см. нашу работу [1]] и определяются из следующих уравнений:

$$\begin{gathered} r'R_n' + Z_n' = 0, \\ (n^2 - 1)\,r'R_n + rR_n' + n^2\,Z_n = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

откуда, исключая Z_n, находим:

$$rR_n'' + (n^2 - 1)\,r''R_n = 0. \tag{4}$$

Единственная особая точка этого уравнения $z = 0$ будет обыкновенной точкой решений того же уравнения (4).

Задачу изгибания может решить только частный интеграл вида

$$R_n\,(z) = b_0\,z\,g\,(z), \tag{5}$$

$b_0 \neq 0$, $g\,(0) = 1$, $g\,(z)$—голоморфная функция.

Особая точка 0 (0.0) остается при изгибании неподвижной и не перестает быть особой, именно конической. Обыкновенный край поверхности S, окружность радиуса r_0, при изгибании переходит в некоторую пространственную линию, краевую линию поверхности S_1. Мы ищем изгибание S при следующих условиях:

a) Найти поверхность S_1, чтобы ее краевая линия лежала на цилиндре, основанием которого был бы краевой круг поверхности S, а образующими—прямые, параллельные оси Oz. Решение задачи должно удовлетворять условию

$$R_n(z_0) = 0.$$

Решение (5) при заданном $n = n_0 > 1$ будет удовлетворять этому условию при некоторых значениях параметра a:

$$a = a^{(1)} < a^{(2)} < \ldots < a^{(i)} < a^{(i+1)} < \ldots < a^{(m)}.$$

b) Найти поверхность S_1, чтобы ее краевая линия была плоской. Среди семейства поверхностей S можно указать такие, краевые линии которых перейдут после изгибания в плоские линии, лежащие в плоскости $z = z_0$. Искомые поверхности S_1 найдутся из условия:

$$Z_n(z_0) = 0 \tag{6}$$

при всяком n. Из второго уравнения системы (3) находим:

$$\frac{R'_n(z_0)}{R_n(z_0)} = -\frac{(n^2-1)\,r'_0}{r_0},$$

где правую часть можно представить в виде:

$$-\frac{(n^2-1)}{z_0}\left[1 + \frac{z_0\theta - \varphi(z_0)}{a z_0 + \varphi(z_0)}\right].$$

При увеличении a от $a^{(i)}$ до $a^{(i+1)}$ это отношение, оставаясь ограниченной величиной, изменяется в одном направлении, и так как отношение в левой части равенства изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то условие (6) будет выполнено для $n = n_0$ при значении $a = \bar{a}^{(i)}$, лежащем в интервале

$$a^{(i)} < \bar{a}^{(i)} < a^{(i+1)}.$$

c) Среди поверхностей, на которых может лежать краевая линия поверхности S_1, существуют конусы, направляющими которых является краевая окружность поверхности S, а вершины их лежат на оси Oz. В цилиндрических координатах уравнение одного такого конуса можно написать в виде

$$r_1 - r_0 = \gamma\,(z_1 - z_0),$$

где z_1, r_1—текущие координаты, γ—угловой коэффициент прямолинейной образующей конуса.

Мы ищем поверхность S_1, чтобы ее краевая линия лежала на этом конусе, для чего должно быть выполнено условие:

$$R_n(z_0) = \gamma\, Z_n(z_0),$$

или на основании (3) условие:

$$\frac{R'_n(z_0)}{R_n(z_0)} = -\frac{(n^2-1)(\theta + a)\gamma + n^2}{r_0\gamma}.$$

При некотором $n = n_0$ мы найдем значения $a = \bar{\bar{a}}^{(i)}$, находящиеся в интервале $[a^{(i)}, \bar{a}^{(i)}]$ или $[\bar{a}^{(i)}, a^{(i+1)}]$ в зависимости от знака γ, и при этом $\bar{\bar{a}}^{(i)}$ краевая линия S_1 будет находиться на конусе.

Для каждого конуса существуют числа $\bar{\bar{a}}^{(i)}$, и, меняя n и a, мы можем осуществить изгибание S при любом заданном конусе. В частности при $\gamma = 0$ конус превращается в цилиндр, тогда $a^{(i)} = a^{(i)}$, или $\overline{\overline{a}}^{(i)} = a^{(i+1)}$; при $\gamma = \pm\infty$ конус превращается в плоскость краевой окружности поверхности S, тогда $\overline{\overline{a}}^{(i)} = \overline{a}^{(i)}$.

2. В предыдущих исследованиях, а также в работах Rembs'a ([3]) предполагается, что линия, образующая поверхность вращения, всюду положительной кривизны. От этого ограничения можно избавиться. Более того, можно предполагать, что линия на некотором достаточно малом участке имеет кривизну отрицательную, причем получающийся на линии выступ должен быть по глубине и ширине достаточно малым, и касательная к кривой, изменяясь непрерывно, нигде не перпендикулярна к оси вращения. При этих предположениях все теоремы об изгибании поверхности вращения остаются в силе, т. е. поверхность S с таким утолщением по некоторому кругу широты изгибаема или не изгибаема в зависимости от соответствующего параметра a. Аналогичное видоизменение выпуклой поверхности вращения, которая не допускает никакого изгибания, образует поверхность вращения с достаточно малым углублением по некоторому кругу широты, и такая поверхность, как показал Cohn-Vossen ([4]), допускает бесконечно малое изгибание первого порядка.

Перепишем уравнение (4) в виде:

$$R_n'' + G(z) R_n = 0, \quad G(z) = \frac{(n^2-1) r''}{r}. \tag{7}$$

Пусть дуга OA имеет две точки перегиба $B(\overline{z}_1)$ и $C(\overline{z}_2)$, и достаточно малая дуга BC обращена своей вогнутостью к оси Oz; для получившегося выступа $G(z) < 0$.

Для доказательства вышеупомянутой теоремы надо установить верность теорем Sturm-Liouville'я, которыми мы пользуемся при изучении нулей решений уравнения (7).

Рассмотрим два уравнения

$$y'' + G_1 y = 0 \quad \text{и} \quad y'' + G_2 y = 0,$$

интегралы которых соответственно $y_1(z)$ и $y_2(z)$. Пусть $G_2(z) > G_1(z) > 0$ всюду кроме интервала $[\alpha, \beta]$, где $G_2 \leqslant G_1$, причем $\alpha < \overline{z}_1 < \overline{z}_2 < \beta$, и пусть $G_2(z) < 0$ в интервале $(\overline{z}_1, \overline{z}_2)$. Пусть $y_1(z)$ имеет два последовательных нуля z_1 и z_2, и интервал $[\alpha, \beta]$ находится внутри $[z_1, z_2]$. Тогда можно доказать теорему колебания, т. е. что между последовательными нулями y_1 находится по крайней мере один нуль y_2, представив правую часть формулы Sturm'a

$$[y_1' y_2 - y_1 y_2']_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} (G_2 - G_1)\, y_1 y_2\, dz$$

в виде

$$\int_{z_1}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{z_2}$$

и взяв интервал $[\alpha, \beta]$ таким достаточно малым, что правая часть будет положительна; левая же часть меньше или равна нулю [Bôcher([5])].

Сравнивая уравнение (7) с уравнением $Q'' + \lambda^2 Q = 0$, $\lambda = \text{const}$, $Q = \sin \lambda z$, мы находим, что решение $R_n(z)$ уравнения (7) имеет в $[0, z_0]$ сколько угодно нулей. При увеличении a нули $R_n(z)$ перемещаются, и при $a = a^{(i)}$ будет иметь место изгибание S, причем краевая линия переходит в линию на соответствующем цилиндре. Так как вторая теорема сравнения также имеет место, то среди поверхностей с утолщением по некоторому кругу широты найдутся такие, которые допускают изгибание с условиями b), c) § 1.

3. От требования аналитичности линии OA легко отказаться в тех частях интервала $[0, z_0]$, точки которых не являются особыми для дифференциального уравнения. Пусть дуга OA имеет всюду непрерывную кривизну, а на некотором интервале около начала пусть соответствующая часть дуги будет аналитической. Тогда к последнему участку кривой применима теория Fuchs'а, что позволяет изучить поведение интеграла уравнения (4) в области особой точки этого дифференциального уравнения. Так как для всего интервала теория Sturm-Liouville'я применима [Bôcher (5)], то теоремы об изгибаемости или неизгибаемости поверхности вращения дуги OA остаются в силе.

Поступило
10 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Люкшин, ДАН, XVII, № 7 (1937). [2] В. С. Люкшин, Математич. сборник, 2 (44), вып. 3 (1937). [3] E. Rembs, Math. ZS., **35** (1932). [4] S. Cohn-Vossen, Math. Ann., **102** (1929). [5] M. Bôcher, Leçons sur les méthodes de Sturm (1917).