Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ОГРАНИЧЕНИЕ МОДУЛЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. В связи с исследованиями о стохастических дифференциальных уравнениях в работе, которая недавно сдана в печать, я указал общий прием доказательства существования и приближенного решения уравнения параболического типа

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=Az+\sum_{i=1}^{h}a_i z_i'+\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{h}B_{ik}z_{ik}'' \qquad \left(z_i'=\frac{\partial z}{\partial x_i},\quad z_{ik}''=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) \tag{1}$$

при $\lambda\geqslant 0$, где $\sum B_{ik}u_i u_k$ — положительно определенная квадратичная форма, если известно значение $z(\lambda, x_1, \ldots, x_h)$ при $\lambda=0$. Слабым местом этого метода было то, что начальную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_h)=z(0, x_1, \ldots, x_h)$ необходимо было предполагать трижды дифференцируемой по всем переменным. Однако нетрудно убедиться, что для того, чтобы освободиться от этого ограничения и даже от требования непрерывности функции φ, достаточно установить верхнюю границу для $|z_i'|$ и $|z_{ik}''|$ при $\lambda\geqslant t_0>0$, зависящую только от максимума $|z|$ при $\lambda\geqslant 0$ (допуская a priori существование производных z до 4-го порядка включительно).

В виду этого важно указать общий прием для установления таких верхних границ. Идея этого приема аналогична указанной мной в 1910 г. в случае уравнений эллиптического типа ([1]). Так как с увеличением числа переменных вычисления усложняются, я остановлюсь сначала на случае $h=1$, $A=0$, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=a(x,\lambda)\frac{\partial z}{\partial x}+B(x,\lambda)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad (B>0),$$

к которому приводится нахождение предельной интегральной функции распределения вероятностей $z(x,\lambda)$ одной случайной переменной в любой момент $\lambda>0$, если оно задано при $\lambda=0$ функцией $\varphi(x)=z(x,0)$.

Известно, что $z^2\leqslant 1$.

Положим

$$u=\lambda(R^2-x^2)^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+cz^2,$$

где R — данное произвольно большое число, и будем рассматривать функцию u при $0\leqslant\lambda\leqslant T$ и $|x|\leqslant R$, полагая постоянную $c>0$. Очевидно, что либо $u\leqslant c$ в области S, где $0\leqslant\lambda\leqslant T$, $|x|\leqslant R$, либо она достигает максимума внутри этой области или при $\lambda=T$. Таким образом, если u имеет максимум, превышающий c, то он достигается в точке, где $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0, \frac{\partial u}{\partial \lambda} \geqslant 0$; следовательно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\lambda \left\{ (R^2 - x^2)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right] - 8x(R^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + (6x^2 - 2R^2) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} + 2c \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \leqslant 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = (R^2 - x^2)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2\lambda (R^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} \left[a'_x \frac{\partial z}{\partial x} + (a + B'_x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right] +$$
$$+ 2cz \left[a \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \geqslant 0,$$

откуда

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2\lambda B (R^2 - x^2)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \left[2c - (R^2 - x^2)^2 - 2\lambda a'_x (R^2 - x^2) + 4\lambda B (3x^2 - R^2) \right] -$$
$$- 2\lambda (R^2 - x^2) [8Bx + a + B'_x] \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2caz \frac{\partial z}{\partial x} \leqslant 0,$$

и тем более,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \left[2c - (R^2 - x^2)^2 - 2\lambda a'_x (R^2 - x^2) + 4\lambda B (3x^2 - R^2) - \lambda \frac{(8Bx + a + B'_x)^2}{2B} \right] \leqslant$$
$$\leqslant 2caz \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Следовательно, полагая постоянную c настолько большой, что коэффициент при $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$ более c, видим, что $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < 2L$, если $|a| \leqslant L$ в области S. Следовательно

$$u < 4TR^4L^2 + c = M^2,$$

а потому во всей области S имеем

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{M}{(R^2 - x^2)\sqrt{\lambda}}. \tag{2}$$

Аналогичным образом ограничиваются и последующие производные. Но так как в случае одной переменной здесь не возникает никаких трудностей, мы перейдем к случаю нескольких переменных, где переход к следующим производным требует особого внимания.

2. Достаточно будет рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = Az + ap + bq + r + t,$$
$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \tag{3}$$

к которому можем привести при $h = 2$ линейное уравнение (1) параболического типа.

Пусть $R > 0$ — данное произвольно большое число и $|z| < N$ в области S, где $0 \leqslant \lambda \leqslant T$ и $x^2 + y^2 \leqslant R^2$; в этой же области полагаем коэффициенты A, a, b ограниченными, как и производные их до требуемого порядка.

Положим

$$u = \lambda F (p^2 + q^2) + cz^2,$$

где $F = (R^2 - x^2 - y^2)^2$. Как и раньше, видим, что либо $u \leqslant c\ N^2$ либо в области S есть точка, где u достигает максимума и где следовательно соблюдены неравенства

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \geqslant 0.$$

Кроме того, принимая во внимание, что p^2+q^2 не меняет своего значения при повороте осей, можем для некоторого упрощения формул положить в этой точке $q=0$.

Таким образом

$$\lambda\left\{F(2r^2+4s^2+2t^2)+4p(rF'_x+sF'_y)+(F''_{x^2}+F''_{y^2})p^2+2Fp\left(\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right\}+$$
$$+2cz(r+t)+2cp^2\leqslant 0$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}=Fp^2+2\lambda Fp\frac{\partial p}{\partial\lambda}+2cz\frac{\partial z}{\partial\lambda}=$$
$$=Fp^2+2\lambda Fp\left[A'_xz+Ap+a'_xp+ar+bs+\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x}\right]+$$
$$+2\,cz[Az+ap+r+t]\geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial\lambda}=\lambda\{2F[r^2+2s^2+t^2-p(A'_xz+Ap+a'_xp+ar+bs)]+$$
$$+4p[rF'_x+sF'_y]+p^2[F''_{x^2}+F''_{y^2}]\}+(2c-F)p^2-2cz(Az+ap)\leqslant 0.$$

Заменяя члены, содержащие r и s их минимумом и замечая, что $2\lambda Ft^2\geqslant 0$, получаем тем более, что

$$p^2\left[2c-F+4(F''_{x^2}+F''_{y^2})-2\lambda F(A+a'_x)-\frac{2(\lambda Fa+2F'_x)^2+(\lambda Fb+2F'_y)^2}{4\lambda F}\right]-$$
$$-2\lambda FA'_xpz-2cz(Az+ap)\leqslant 0.$$

Благодаря тому, что $\frac{F'^2_x+F'^2_y}{F}=16(x^2+y^2)\leqslant 16R^2$ остается ограниченным, можем постоянную c выбрать настолько большой, чтобы коэффициент при p^2 был больше c; следовательно p должно удовлетворять неравенству второй степени

$$p^2+h_1p+h_2\leqslant 0$$

с ограниченными коэффициентами h_1, h_2, а потому p^2 при максимуме u не превышает некоторого определенного значения M^2; откуда подобно предыдущему можем заключить, что во всей области S

$$p^2+q^2<\frac{TR^4M^2+cN^2}{\lambda(R^2-x^2-y^2)^2}=\frac{M_1^2}{\lambda(R^2-x^2-y^2)^2}. \tag{4}$$

3. После того как верхняя граница $\frac{M_1}{(R^2-x^2-y^2)\sqrt{\lambda}}$ для $\sqrt{p^2+q^2}$ найдена для внутренних точек области S, можем выбрать произвольно малое $\lambda_0>0$ и $R_1<R$, произвольно близкое к R, и рассмотреть в соответствующей области S_1 функцию

$$u=\lambda_1F(r^2+2s^2+t^2)+c(p^2+q^2),$$

где $\lambda_1=\lambda-\lambda_0$, $F=(R_1^2-x^2-y^2)^2$.

При этом, замечая, что $r^2+2s^2+t^2$ не меняет своего значения при повороте осей, можем для некоторого упрощения вычислений положить, что в точке, где u достигает максимума, $s=0$.

Таким образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\lambda F\left[r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)+t\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+3\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right]+4\lambda F'_x\left(r\frac{\partial r}{\partial x}+t\frac{\partial t}{\partial x}\right)+4\lambda F'_y\left(r\frac{\partial r}{\partial y}+t\frac{\partial t}{\partial y}\right)+$$
$$+\lambda(F''_{x^2}+F''_{y^2})(r^2+t^2)+2c\left[p\left(\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x}\right)+q\left(\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial y}\right)+r^2+t^2\right]\leqslant 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = F(r^2+t^2) + 2\lambda F\left(r\frac{\partial r}{\partial \lambda} + t\frac{\partial t}{\partial \lambda}\right) + 2c\left(p\frac{\partial p}{\partial \lambda} + q\frac{\partial q}{\partial \lambda}\right) =$$
$$= F(r^2+t^2) + 2\lambda F\Big\{r\Big[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + a\frac{\partial r}{\partial x} + b\frac{\partial r}{\partial y} + (2a'_x + A)r +$$
$$+ (a''_{x^2} + 2A'_x)p + b''_{x^2}q + A''_{x^2}z\Big] + t\Big[\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + a\frac{\partial t}{\partial x} + b\frac{\partial t}{\partial y} +$$
$$+ (2b'_y + A)t + a''_{y^2}p + (b''_{y^2} + 2A'_y)q + A''_{y^2}z\Big]\Big\} +$$
$$+ 2c\Big\{p\Big[\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} + ar + (a'_x + A)p + b'_x q + A'_x z\Big] +$$
$$+ q\Big[\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y} + bt + a'_y p + (b'_y + A)q + A'_y z\Big]\Big\} \geqslant 0;$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2\lambda F\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ 2\lambda\left[(2F'_x - aF)\left(r\frac{\partial r}{\partial x} + t\frac{\partial t}{\partial x}\right) + (2F'_y - bF)\left(r\frac{\partial r}{\partial y} + t\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right] +$$
$$+ \lambda\left\{(F''_{x^2} + F''_{y^2})(r^2+t^2) - 2F[r^2(2a'_x + A) + t^2(2b'_y + A)]\right\} -$$
$$- 2\lambda F\{r[(a''_{x^2} + 2A'_x)p + b''_{x^2}q + A''_{x^2}z] + t[a''_{y^2}p + (b''_{y^2} + 2A'_y)q + A''_{y^2}z]\} +$$
$$+ 2c[r^2 + t^2 - apr - bqt - (a'_x + A)p^2 -$$
$$- (b'_x + a'_y)pq - (b'_y + A)q^2 - z(A'_x p + A'_y q)].$$

Следовательно, замечая, что

$$F\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] + (2F'_x - aF)\left(r\frac{\partial r}{\partial x} + t\frac{\partial t}{\partial x}\right) +$$
$$+ (2F'_y - bF)\left(r\frac{\partial r}{\partial y} + t\frac{\partial t}{\partial y}\right) \geqslant -\frac{1}{F}\left[\left(F'_x - \frac{1}{2}aF\right)^2 + \left(F'_y - \frac{1}{2}bF\right)^2\right](r^2+t^2),$$

и учитывая, что z, p, q ограничены так же, как и коэффициенты a, b, A с их производными, при $x^2 + y^2 \leqslant R_1^2$, видим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} > (r^2+t^2)\left[2c - \frac{\lambda F}{2}(a + b + 4A) + \lambda(F''_{x^2} + F''_{y^2}) +\right.$$
$$\left.+ 2\lambda\left(aF'_x + bF'_y - \frac{F'^2_x + F'^2_y}{F}\right)\right] - 4\lambda F(a'_x r^2 + b'_y t^2) + c(Pr + Qt + H),$$

где P, Q, H ограничены. Таким образом, выбирая c достаточно большим, чтобы коэффициенты при r^2 и t^2 стали больше c, заключаем, что в точке, где u достигает максимума, $r^2 + t^2 + Pr + Qt + H \leqslant 0$; поэтому, если $|P| \leqslant N_1$, $|Q| \leqslant N_1$, $|H| \leqslant N_2$, то в точке, где осуществляется максимум: $r^2 + t^2 \leqslant 2(N_1^2 + N_2)$, так что во всех точках рассматриваемой области имеем:

$$r^2 + 2s^2 + t^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1(R_1^2 - x^2 - y^2)}\left[2TR_1^4(N_1^2 + N_2) + \frac{M_1^2}{\lambda_0(R^2 - R_1^2)^2}\right].$$

Замечая, что N_1^2 и N_2 не выше второй степени относительно p и q, и полагая $\lambda_1 = \lambda_0 = \frac{\lambda}{2}$, $R_1^2 - x^2 - y^2 = R^2 - R_1^2 = \frac{1}{2}(R^2 - x^2 - y^2)$, можем для всех внутренних точек области S $(0 \leqslant \lambda \leqslant T,\ x^2 + y^2 \leqslant R^2)$ указать одну и ту же ограниченную постоянную M_2 так, что

$$\sqrt{r^2 + 2s^2 + t^2} < \frac{M_2}{\lambda[R^2 - x^2 - y^2]^2}.$$

Применяя последовательно тот же прием, аналогичным образом можно было бы ограничить и следующие производные.

Поступило
5 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et M. Picard, C. R. (1910).