Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ $|x-c|^p$

1. В работе, которая сдана в печать, мной доказано, что наилучшее приближение при помощи многочленов степени n на отрезке $(-1, +1)$ $|x|^p$ (где p—любое данное положительное число) удовлетворяет асимптотическому равенству:

$$E_n|x|^p \sim \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{2}p\right|\frac{L(p)}{n^p}=\frac{\mu(p)}{n^p}, \tag{1}$$

где $L(p)$ есть некоторая определенная непрерывная функция. Здесь я хочу показать, что при любом c $(-1<c<1)$ имеет место равенство:

$$\lim_{n=\infty} n^p E_n|x-c|^p=(1-c^2)^{\frac{p}{2}}\mu(p). \tag{2}$$

Для этого докажем сперва следующие предложения.

Теорема I. *Пусть $E_{n,q(x)}[f(x);\ (a,b)]$ означает наилучшее взвешенное приближение $f(x)$ на отрезке (a,b) при весе $q(x)$ посредством многочленов степени n; в таком случае*

$$E_{n,n^{x^2}}[|x|^p;\ (a,b)]<E_{n,1}[|x|^p;\ (a,b)](1+\alpha_n), \tag{3}$$

где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$ $(-1\leqslant a<0<b\leqslant 1)$.

В дальнейшем для краткости будем полагать $E_{n,1}[f(x);\ (a,b)]=E_n[f(x);\ (a,b)]$, $E_{n,q(x)}[f(x);\ (-1,+1)]=E_{n,q(x)}[f(x)]$.

В самом деле, полагая $h=\log n$, имеем на отрезке (a,b):

$$n^{x^2}=e^{hx^2}=1+hx^2+\ldots+\frac{h^k x^{2k}}{k!}+\varepsilon_k=R_{2k}(x)+\varepsilon_k,$$

$$n^{-x^2}=e^{-hx^2}=1-hx^2+\ldots+(-1)^k\frac{h^k x^{2k}}{k!}+\varepsilon_k'=Q_{2k}(x)+\varepsilon_k',$$

где $k=[\log^2 n]$, а потому $|\varepsilon_k|<\left(\frac{he}{k+1}\right)^{k+1}$, $|\varepsilon_k'|<\left(\frac{he}{k+1}\right)^{k+1}$.

Из равенства

$$1=(R_{2k}(x)+\varepsilon_k)(Q_{2k}(x)+\varepsilon_k')$$

заключаем, что

$$|R_{2k}(x)Q_{2k}(x)-1|<2e^h\left[\frac{he}{k+1}\right]^{k+1}<2n\left(\frac{e}{\log n}\right)^{\log^2 n}=\beta_n\to 0.$$

Поэтому $(m = n + 2k)$

$$(1+\beta_n) E_n[|x|^p;\ (a, b)] > E_{n, R_{2k}(x)\, Q_{2k}(x)}[|x|^p;\ (a, b) >$$
$$> E_{m,\, R_{2k}(x)}[|x|^p Q_{2k}(x);\ (a, b)] > E_{m,\, R_{2k}(x)}[|x|^p;\ (a, b)] -$$
$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{h^i}{i!} E_{m,\, R_{2k}(x)}[|x|^{p+2i};\ (a, b)]. \tag{4}$$

Но мной ранее были установлены неравенства [1]:

$$m^p E_m |x|^p < \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right| \Gamma(p).$$

Следовательно вследствие $|R_{2k}(x)| \leqslant n$ при $(x) \leqslant 1$ имеем тем более:

$$m^{p+2i-1} E_{m,\, R_{2k}(x)}[|x|^{p+2i};\ (a, b)] < \frac{4}{\pi}\Gamma(p+2i),$$

а потому из (4) выводим, что при достаточно больших n

$$E_{m,\, R_{2k}(x)}[|x|^p;\ (a, b)] < (1+\beta_n) E_n[|x|^p;\ (a, b)] +$$
$$+\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{k} \frac{h^i \Gamma(p+2i)}{i!\, n^{p+2i-1}} < (1+\beta_n) E_n[|x|^p;\ (a, b)] + \frac{C \log n}{n^{p+1}},$$

где C—независимая от n постоянная, лишь бы $\frac{k}{n} \to 0$. Таким образом, принимая во внимание, $E_n|x|^p > \frac{C_1}{n^p}$, где C_1 независимо от n, имеем при n весьма большом:

$$E_{m,\, R_{2k}(x)}[|x|^p;\ (a, b)] < (1+\gamma_n) E_n[|x|^p;\ (a, b)],$$

где $\gamma_n \to 0$ вместе с $\frac{k}{n}$.

С другой стороны, легко проверить, что при всяком $\delta_m > 0$

$$E_{m-1}[|x|^p;\ (a, b)] < E_m[|x|^p;\ (a, b)] \frac{(1+\delta_m)^m + 1}{(1+\delta_m)^{m-p} - 1},$$

откуда, полагая $(1+\delta_m)^{m-p} = 2m$, получаем $\left(\text{при } \frac{m}{p} \geqslant 1 + 2\log 2m\right)$:

$$E_{m-1}[|x|^p;\ (a, b)] < \frac{(2m)^{\frac{m}{m-p}} + 1}{2m-1} E_m[|x|^p;\ (a, b)] <$$
$$< \frac{2m\left(1 + \frac{2p\log 2m}{m-p}\right) + 1}{2m-1} E_m[|x|^p;\ a, b)];$$

следовательно

$$E_n[|x|^p;\ (a, b)] < \frac{2(n+k)+1}{2n+1} \prod_{i=1}^{2k}\left(1 + \frac{2p[\log^2(n+i)]}{n+i-p}\right) E_m[|x|^p;\ (a, b)] <$$
$$< (1+\varepsilon_n) E_m[|x|^p;\ (a, b)], \tag{5}$$

где ε_m стремится к нулю, так как $\frac{k\log n}{n} \to 0$. Таким образом теорема доказана.

Следствие I. *Как бы малы ни были числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, возможно указать такое число n_0, что для всякого целого числа $n > n_0$ существует многочлен $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий неравенству*:

$$|P_n(x) - |x-c|^p| < (1+\beta) E_n |x-c|^p \tag{6}$$

на всем отрезке $(-1, +1)$ *и неравенству*:
$$|P_n(x) - |x-c|^p| < \beta E_n\, |x-c|^p \tag{6bis}$$
в промежутках $(-1,\ c-\alpha)$, $(c+\alpha,\ 1)$.

Действительно, вследствие (3) существует многочлен $S_n(x)$ степени n, удовлетворяющий неравенству:
$$||x|^p - S_n(x)| < E_n[|x|^p;\ (-1,\ b)](1+\alpha_n)$$
на всем отрезке $(-1, b)$ и неравенству:
$$||x|^p - S_n(x)| < \frac{1+\alpha_n}{n^{\delta^2}} E_n[|x|^p;\ (-1,\ b)]$$
в промежутках $(-1, -\delta)$ и (δ, b), где, полагая для определенности $c > 0$,
$$b = \frac{1-|c|}{1+c}, \quad \delta = \frac{\alpha}{1+c}.$$

В таком случае после подстановки $x = \frac{x_1 - c}{1+c}$ многочлен
$$(1+c)^p S_n\left(\frac{x_1-c}{1+c}\right) = P_n(x_1)$$
удовлетворяет на $(-1, +1)$ неравенству:
$$||x_1-c|^p - P_n(x_1)| < (1+\alpha_n) E_n\, |x_1 - c|^p$$
и неравенству:
$$||x_1-c|^p - P_n(x_1)| < \frac{1+\alpha_n}{n^{\delta^2}} E_n\, |x_1-c|^p$$
в промежутках $(-1, c-\alpha)$ и $(c+\alpha, 1)$. Следовательно для осуществления неравенств (6) и (6bis) достаточно положить n_0 настолько большим, чтобы $\alpha_{n_0} \leqslant \beta$, $1+\beta < \beta n_0^{\left(\frac{\alpha}{1+c}\right)^2}$.

2. Будем обозначать через $E_n[f(x);\ (a,\ b);\ L]$, где $(-1 < a < b < 1)$, *наилучшее приближение* $f(x)$ *на отрезке* (a, b) *при помощи многочленов* $P_n^*(x)$ *степени* n, *подчиненных в промежутках* $(-1, a)$ и $(b, 1)$ *условию* $|P_n^*(x)| \leqslant L$.

Теорема II. *Каковы бы ни были данные числа* $p > 0$, $h > 0$, $-1 < c < 1$, *и как бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *при* n *достаточно большом имеет место неравенство*:
$$E_n[|x-c|^p;\ (a,\ b);\ n^h] > (1-\varepsilon) E_n\, |x-c|^p, \tag{7}$$
лишь бы только $c - a \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$, $b - c \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

В самом деле, положим $m = n + 2l$, где $l = n^\rho$ — целое число, $2\alpha < \rho < 1$, $q(x) = \left[1 - \left(\frac{x-c}{1+|c|}\right)^2\right]^l$; в таком случае
$$E_{n,\,q(x)}\, |x-c|^p \geqslant E_m[q(x)\, |x-c|^p].$$

Известно [1], что можно указать такую постоянную λ_p, что
$$E_m\, |x|^{p+2i} < \lambda_p \frac{p(p+1)\ldots(p+2i-1)}{m^{2i}} E_m\, |x|^p,$$

каково бы ни было целое число $i > 0$; следовательно

$$E_{n,\,q(x)}\,|x-c|^p > E_m\,|x-c|^p\left\{1-\frac{\lambda_p}{(1-|c|)^p}\sum_1^l C_l^i\frac{p(p+1)\ldots(p+2i-1)}{m^{2i}}\right\} >$$

$$> (1-\varepsilon_n')\,E_m\,|x-c|^p > (1-\varepsilon_n)\,E_n\,|x-c|^p, \tag{8}$$

где $\varepsilon_n' \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$. Кроме того из (8) следует, что существует такая постоянная A_p, что

$$E_{n,\,q(x)}\,|x-c|^p > \frac{A_p}{n^p}\,. \tag{9}$$

Положим теперь, что $|P_n^*(x)| \leqslant n^h$ на всем отрезке $(-1, +1)$; в таком случае при $-1\leqslant x\leqslant c-\frac{1}{n^\alpha}$ и при $c+\frac{1}{n^\alpha}\leqslant x\leqslant 1$ имеем вследствие (9):

$$q(x)\,|P_n^*(x)-|x-c|^p| < \left[1-\frac{1}{(1+|c|)^2 n^{2\alpha}}\right]^l (n^h+2^p) <$$

$$< \frac{1}{n^{p+1}} < E_{n,\,q(x)}\,|x-c|^p,$$

когда n достаточно велико. Поэтому, принимая во внимание, что $q(x)\leqslant 1$, заключаем, что из неравенства (8) вытекает (7).

Следствие II. *Пусть*

$$f(x)=\sum_{i=1}^h A_i\,|x-a_i|^p+\varphi(x), \qquad (-1<a_i<1) \tag{10}$$

($p>0$ *не равно целому четному числу*), *функция* $\varphi(x)$ *имеет ограниченную производную порядка* $[p+1]$; *пусть* M_n *есть наибольшее из значений* $E_n(A_i\,|x-a_i|^p)$ *для данного* n. *В таком случае, как бы мало ни было* $\beta>0$, *можно указать такое число* n_0, *что при всяком* $n\geqslant n_0$

$$1-\beta < \frac{E_n[f(x)]}{M_n} < 1+\beta. \tag{11}$$

Действительно, применяя следствие I к каждому из слагаемых $A_i\,|x-a_i|^p$, получим:

$$E_n[f(x)] < M_n(1+\beta);$$

с другой стороны, если бы было возможно построить многочлены $P_n(x)$ сколько угодно высокой степени n, для которых $|P_n(x)-f(x)|\leqslant M_n(1-\beta)$, мы пришли бы к противоречию с теоремой II, так как для каждого $i=1, 2, \ldots h$ можно было бы, введя согласно следствию I многочлены $Q_{n,\,i}(x)$ степени n, приближающие $f(x)-A_i\,|x-a_i|^p$ на $(a_i-\alpha, a_i+\alpha)$ с погрешностью меньшей, чем $\frac{1}{2}\beta M_n$, построить ограниченные на отрезке $(-1, +1)$ многочлены $R_{n,\,i}(x)=P_n(x)-Q_{n,\,i}(x)$, для которых

$$|R_{n,\,i}(x)-A_i\,|x-a_i|^p| = |P_n(x)-f(x)+[f(x)-A_i\,|x-a_i|^p-$$

$$-Q_{n,\,i}(x)]| < M_n\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)$$

в промежутке $(a_i-\alpha,\ a_i+\alpha)$.

3. Пусть в частности $(-1<a<1)$

$$f(x)=|x^2-a^2|^p=|x-a|^p\,|x+a|^p=|2a|^p[|x-a|^p+|x+a|^p]+\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = [|x-a|^p - |2a|^p][|x+a|^p - |2a|^p] - |2a|^{2p}$$

очевидно удовлетворяет условию следствия II, поэтому при n достаточно большом

$$1-\alpha < \frac{E_n|x^2-a^2|^p}{|2a|^p E_n|x-a|^p} < 1+\alpha, \tag{12}$$

как бы мало ни было $\alpha > 0$.

Предположим теперь, что при данном p для некоторого значения a предельная формула

$$\lim_{n=\infty} n^p E_n|x-a|^p = H(a) \tag{13}$$

верна (согласно сказанному вначале это справедливо для $a=0$).

Очевидно $H(a) = H(-a)$. Положим $a = 2a_1^2 - 1$. Делая подстановку $x = 2z-1$, замечаем, что

$$E_n\left[\left|z-\frac{a+1}{2}\right|^p;\ (0, 1)\right] = E_n\left[\left|\frac{x-a}{2}\right|^p;\ (-1, +1)\right];$$

поэтому из (13) следует также, что

$$\lim_{n=\infty}(2n)^p E_n[|z-a_1^2|^p;\ (0, 1)] = H(a).$$

Но так как

$$E_n[|z-a_1^2|^p;\ (0,1)] = E_{2n}[|x^2-a_1^2|^p;\ (-1,+1)] =$$
$$= E_{2n+1}[|x^2-a_1^2|^p;\ (-1,+1)],$$

то при всяком $n \to \infty$ имеем:

$$\lim_{n=\infty} n^p E_n|x^2-a_1^2|^p = H(a),$$

а потому вследствие (12) из (13) вытекает также существование предельного равенства:

$$\lim_{n=\infty} n^p E_n|x-a_1|^p = \frac{H(a)}{|2a_1|^p} = H(a_1), \tag{14}$$

где $a_1 = \pm\sqrt{\frac{1+a}{2}}$. Аналогичным образом убеждаемся последовательно в существовании предельных равенств

$$\lim_{n=\infty} n^p E_n|x-a_{k+1}|^p = \frac{H(a_k)}{|2a_{k+1}|^p} = H(a_{k+1}) \tag{14bis}$$

где $a_{k+1} = \pm\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}$. Полагая $a=\cos\varphi$, $a_k=\cos\varphi_k$, $H(a)=H(\cos\varphi)=$ $=F(\varphi)$, видим, что при $a=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, поэтому $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4}$, и вообще $\varphi_k = \frac{1}{2}\varphi_{k-1} = \frac{l\pi}{2^{k+1}}$, где l—произвольное нечетное число. Таким образом предельная формула (13) доказана для всех $a=\cos\varphi$, где угол $\varphi = \frac{l\pi}{2^k}$ соответствует вершинам любого правильного многоугольника с последовательно удваивающимся числом сторон. Для определения $H(a_k) = F(\varphi_k)$ имеем уравнение

$$\frac{F(\varphi_{k-1})}{|2\cos\varphi_k|^p} = \frac{F(2\varphi_k)}{|2\cos\varphi_k|^p} = F(\varphi_k), \tag{15}$$

причем $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = H(0) = \mu(p)$, поэтому

$$F(\varphi_1) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mu(p)}{\left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)^p} = \mu(p)\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^p = \mu(p)(\sin\varphi_1)^p,$$

но если $F(\varphi_k) = F(2\varphi_{k+1}) = \mu(p)\,|\sin\varphi_k|^p$, то из (15) следует, что

$$F(\varphi_{k+1}) = \mu(p)\left|\frac{\sin 2\varphi_{k+1}}{2\cos\varphi_{k+1}}\right|^p = \mu(p)\,|\sin\varphi_{k+1}|^p.$$

Таким образом для всех значений $a = \cos\frac{l\pi}{2^k}$ (при любых целых k и $l < 2^k$) справедливо равенство

$$\lim_{n=\infty} n^p\,|x-a|^p = \mu(p)(1-a^2)^{\frac{p}{2}}. \tag{16}$$

Но, каково бы ни было c $(0 < c < 1)$, полагая

$$0 < u_0 = \cos\frac{l\pi}{2^k} \leqslant c < \cos\frac{l-1}{2^k}\pi = u_1,$$

имеем при всяком n

$$n^pE_n\left[|x-c|^p;\ \left(-\frac{c}{u_1},\ \frac{c}{u_1}\right)\right] \leqslant n^pE_n\,|x-c|^p \leqslant$$
$$\leqslant n^pE_n\left[|x-c|^p;\ \left(-\frac{c}{u_0},\ \frac{c}{u_0}\right)\right],$$

и так как по доказанному

$$\lim_{n=\infty} n^pE_n\left[|x-c|^p;\ \left(-\frac{c}{u_1},\ \frac{c}{u_1}\right)\right] =$$
$$= \lim_{n=\infty} n^p\left(\frac{c}{u_1}\right)^pE_n\,|x-u_1|^p = \left(\frac{c}{u_1}\right)^p\mu(p)(1-u_1^2)^{\frac{p}{2}},$$
$$\lim_{n=\infty} n^pE_n\left[|x-c|^p;\ \left(-\frac{c}{u_0},\ \frac{c}{u_0}\right)\right] = \left(\frac{c}{u_0}\right)^p\mu(p)(1-u_0^2)^{\frac{p}{2}},$$

следовательно равенство (2) справедливо при всяком c $(-1 < c < 1)$.

Поступило
5 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, гл. II, § 6.