Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Н. Ф. РЕЙН

ОБ УПРОЩЕННОЙ СХЕМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 28 II 1938)

Рассмотрим плоскую ограниченную проблему трех тел, в которой движение двух масс m_1 и m_2 считается заданным и изучается движение третьей массы, не влияющей на движение двух остальных. Обозначим через ξ, η координаты этой третьей массы относительно неподвижной системы осей с началом в центре инерции масс m_1 и m_2; через ξ_i, η_i $(i=1,2)$ обозначим в той же системе осей координаты материальных точек m_1 и m_2. Тогда уравнения движения точки (ξ, η) могут быть написаны в виде:

$$\ddot{\xi}=U'_{\xi}; \quad \ddot{\eta}=U'_{\eta}, \tag{1}$$

где

$$U=\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2} \tag{2}$$

и где

$$r_i=\sqrt{(\xi-\xi_i)^2+(\eta-\eta_i)^2} \qquad (i=1,2). \tag{3}$$

В общем случае мы имеем

$$\xi_i=f_i(t); \quad \eta_i=\varphi_i(t) \qquad (i=1,2), \tag{4}$$

где f_i, φ_i суть известные функции времени t.

В простейшем случае, когда материальные точки m_1 и m_2 движутся равномерно по круговым орбитам вокруг своего общего центра тяжести, Якоби ([1]) показал существование первого интеграла системы (1), получившего название интеграла Якоби. Как известно, этот интеграл представляет собой не что иное, как линейную комбинацию интеграла энергии и интеграла площадей. Наличие интеграла Якоби тесно связано с тем обстоятельством, что путем введения равномерно вращающихся осей, т. е. путем введения замены зависимых переменных посредством формул:

$$\begin{aligned}\xi&=x\cos nt-y\sin nt,\\ \eta&=x\sin nt+y\cos nt,\end{aligned} \tag{5}$$

где n—угловая скорость обращения m_1 и m_2 вокруг своего общего центра тяжести, мы приводим проблему (1) к проблеме притяжения двух неподвижных масс в поле центробежных и кориолисовых сил, и что силовая функция последней проблемы оказывается не содержащей явно времени. Этот простейший случай ограниченной проблемы называют кратко круговой ограниченной проблемой. В этом случае мы имеем:

$$f_i = (-1)^{i-1} a_i \cos nt; \quad \varphi_i = (-1)^{i-1} a_i \sin nt \qquad (i = 1, 2), \tag{6}$$

где a_1 и a_2 суть радиусы круговых орбит m_1 и m_2, связанные между собой соотношением

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} a_1. \tag{7}$$

Наличие первого интеграла круговой проблемы, как известно, позволяет достаточно далеко продвинуть качественное изучение свойств траекторий этой задачи.

Отказываясь от ограничения кругового и равномерного движения материальных точек m_1 и m_2, мы приходим к значительно более сложным и интересным для реальных задач небесной механики случаям. В частности мы приходим к так называемой эллиптической ограниченной проблеме трех тел, где m_1 и m_2 движутся вокруг общего центра тяжести по кеплеровым эллипсам. Зависимость f_i и φ_i от времени в этой проблеме задается в виде бесконечных рядов вида:

$$\begin{aligned} f_i &= (-1)^{i-1} a_i \left[c_0 + c_1 \cos nt + c_2 \cos 2nt + \cdots + c_k \cos knt + \cdots\right], \\ \varphi_i &= (-1)^{i-1} a_i \left[\qquad s_1 \sin nt + s_2 \sin 2nt + \cdots + s_k \sin knt + \cdots\right], \end{aligned} \tag{8}$$

$$(i = 1, 2)$$

расположенных по синусам и косинусам дуг, кратных средней аномалии, причем коэффициенты c_k и s_k суть известные функции эксцентриситета e эллиптических орбит материальных точек m_1 и m_2 и a_1 и a_2 суть большие полуоси этих орбит.

Для этого частного случая ограниченной проблемы трех тел нам неизвестен первый интеграл, аналогичный интегралу Якоби в круговой задаче. Это обстоятельство сильно затрудняет общий качественный анализ свойств траекторий эллиптической задачи. Попытки обхода этого затруднения могут быть различными. В частности можно пытаться обойти это затруднение путем построения упрощенной схемы, которая представляла бы собой шаг вперед по отношению к простейшему случаю круговой проблемы и в то же время допускала бы известный первый интеграл, аналогичный интегралу Якоби.

Одну из попыток построения упрощенной схемы, допускающей учет влияния эллиптичности орбит возмущающих масс, мы находим в работе Фату ([2]), который, опираясь на идею метода Гаусса для вычисления вековых возмущений ([3]), дал постановку эллиптической осредненной ограниченной задачи. В схеме Фату притяжение движущихся материальных точек m_1 и m_2 заменяется притяжением неподвижных эллиптических материальных колец, вдоль которых массы m_1 и m_2 предполагаются распределенными пропорционально времени пребывания на элементе ds. Система уравнений движения в схеме Фату, разумеется, допускает интеграл живых сил. Однако схема Фату не может считаться шагом вперед по сравнению с круговой ограниченной проблемой; учитывая осредненное влияние эксцентричности орбит возмущающих масс, эта схема учитывает вообще только осредненные возмущения.

С нашей точки зрения представляется более целесообразным введение иной упрощенной схемы, в которой осреднение распространялось бы не на все движения масс m_1 и m_2, как в схеме Фату, но лишь на отклонение этого движения от равномерного кругового. При этом, как нам кажется, получаемые характеристики движения будут иметь более тесное отношение к истинному движению, чем такие же характеристики в схеме Фату и в схеме круговой ограниченной задачи.

К предлагаемой здесь схеме можно притти при помощи следующих соображений.

Уравнения (1) могут быть преобразованы к системе равномерно вращающихся осей с началом O в центре инерции m_1 и m_2 и с угловой скоростью вращения, равной среднему движению n этих масс. Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= U'_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= U'_y, \end{aligned} \tag{9}$$

где U определяется формулой (2), где

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \qquad (i = 1, 2) \tag{10}$$

и где

$$\begin{aligned} x_i &= f_i \cos nt + \varphi_i \sin nt, \\ y_i &= -f_i \sin nt + \varphi_i \cos nt \end{aligned} \qquad (i = 1, 2), \tag{11}$$

причем f_i и φ_i определяются формулами (8).

Заменяя в уравнениях (9) точное выражение для U его осредненным по времени значением

$$[U] = \frac{m_1}{2\pi} \int\limits_{nt=0}^{2\pi} \frac{ndt}{r_1} + \frac{m_2}{2\pi} \int\limits_{nt=0}^{2\pi} \frac{ndt}{r_2}, \tag{12}$$

мы приходим к такой схеме движения, в которой притяжение движущихся по траекториям (11) масс m_1 и m_2 заменено притяжением материальных колечек, размеры которых пропорциональны эксцентриситету e эллиптических орбит и центры которых движутся с постоянной угловой скоростью n вокруг точки O по кругам с радиусами, равными соответственно a_1 и a_2. При этом количество массы, падающее на каждый отдельный элемент колечка, пропорционально, как и в способе Гаусса, времени пребывания на данном элементе, в то время как общая масса каждого колечка равна массе соответствующей материальной точки.

Уравнения движения в такой схеме, называемой нами «полуосредненной эллиптической ограниченной проблемой трех тел», запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= [U]'_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= [U]'_y, \end{aligned} \tag{13}$$

и будут допускать первый интеграл

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + [U] + h, \tag{14}$$

где h—произвольная постоянная интеграции.

В виду наличия интеграла (14) качественный анализ свойств траекторий предложенной схемы может быть, принципиально говоря, проведен столь же далеко, как и в круговой проблеме. Однако непосредственное числовое изучение качественных характеристик нашей полуосредненной проблемы затрудняется тем обстоятельством, что координаты x_i, y_i выражаются через время посредством бесконечных рядов (11). Но в тех случаях, когда мы можем предполагать, что эксцентриситет эллиптических орбит m_1 и m_2 мал по сравнению с единицей, истинные сложные кривые (11), по которым движутся m_1 и m_2 относительно вращающихся осей и вдоль по которым мы распределяем массы m_1 и m_2, конструируя описанные выше материальные колечки, могут быть заменены эллипсами, уравнения которых получатся после отбрасывания в разложениях (11) членов порядка, выше первого относительно эксцентриситета e. В этом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i-1} a_i (1 - e \cos nt), \\ y_i &= (-1)^{i-1} 2a_i e \sin nt \end{aligned} \qquad (i = 1, 2), \tag{15}$$

и следовательно движение материальной точки m_i относительно равномерно вращающихся осей осредняется вместо истинной траектории по изображающему ее с точностью до членов порядка $a_i e^2$ исключительно эллипсу, центр которого лежит в точке, соответствующей среднему расстоянию a_i массы m_i от центра инерции, и полуоси которого суть $a_i e$ и $2a_i e$.

Уравнения движения в этой «упрощенной полуосредненной эллиптической проблеме» имеют попрежнему вид уравнений (13), в которых $[U]$ представится суммой интегралов эллиптического типа:

$$[U] = \frac{m_1}{2\pi} \int\limits_{nt=0}^{2\pi} \frac{ndt}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} + \frac{m_2}{2\pi} \int\limits_{nt=0}^{2\pi} \frac{ndt}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} \tag{16}$$

и которые снова допускают интеграл (14).

В настоящей заметке мы только формулируем новую схему и показываем наличие в этой схеме упомянутого первого интеграла (14). На очереди стоит как непосредственное развитие качественного анализа свойств траекторий предложенной схемы, так и детальное исследование степени ее приближения к исходной, неосредненной схеме эллиптической задачи. Здесь мы заметим только, что точки либрации нашей полуосредненной эллиптической проблемы трех тел будут оставаться неподвижными в системе равномерно вращающихся осей и следовательно будут представлять равномерное круговое движение в осях неподвижных. Этот факт указывает на то, что либрационные решения введенной нами схемы неточно соответствуют строгим лагранжевым решениям неосредненной эллиптической ограниченной проблемы (которые в данном случае должны соответствовать эллиптическим траекториям относительно неподвижных осей), и приводит к необходимости исследования степени этого искажения в зависимости от величины эксцентриситета e орбит m_1 и m_2.

Поступило
28 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Якоби, Лекции по динамике. Лекция пятая. [2] P. Fatou, Acta Astr., sér. a, 2 (1931). [3] Gauss, Werke, B. III, S. 331.