Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. ЛУЗИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ ГЛАВНОГО ОСНОВАНИЯ I, II

I. *Проблема главного основания.* Начало этой проблемы положено знаменитым мемуаром (1) московского геометра Карла Михайловича Петерсона об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями, появившимся в свет в 1866 г. Этот мемуар, а также позднейшая заметка (2) французского геометра Ribaucour'a, напечатанная в 1891 г. и содержащая найденное им независимым образом понятие *сопряженной сети, общей двум поверхностям* *, послужили источником ряда дальнейших исследований, из которых все отчетливее и отчетливее стала выступать важность понятия *главного основания.* При наличии взаимно однозначного соответствия точек двух наложимых друг на друга поверхностей S и S', происходящего от наложения одной на другую, всегда существует на поверхности S одна и только одна сопряженная сеть R, образованная двумя различными семействами действительных или мнимых кривых **, переходящая на поверхности S' также в *сопряженную* сеть R' (Петерсон, Ribaucour). По терминологии Петерсона (1) сеть R есть простое основание поверхности S. *Но если одна и та же сопряженная сеть R, лежащая на S, переходит в сопряженные сети R' и R'', лежащие на двух нетождественных поверхностях S' и S'', наложимых на S, тогда сеть R переходит в сопряженные сети R_t бесчисленного множества поверхностей S_t, наложимых на S и образующих непрерывное семейство $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}=\{S_t\}$, зависящее от произвольного параметра t и содержащее все три данные поверхности S, S' и S''* (Петерсон). Можно рассматривать это семейство $\mathfrak{F}$ как образованное в пространстве непрерывной деформацией поверхности S, проходящей через оба заданных положения S' и S''; это и есть «изгибание

---

* Не зная ничего о предшествовавших работах К. М. Петерсона, A. Ribaucour считал это важное понятие новым, когда печатал в 1891 г. свою заметку в C. R. de Paris, датированную 17 августа. В действительности понятие это было встречено и изучено К. М. Петерсоном еще в 1866 г., дата опубликования русского мемуара; немецкий перевод (3) работ К. М. Петерсона был издан в 1868 г. и французский перевод (4) их появился только в 1905 г.

** Мы пренебрегаем здесь теми исключительными случаями, когда асимптотические линии являются соответственными: известно, что в этом случае поверхности S и S' суть либо *тождественные* (до положения в пространстве), либо *симметричные*, либо *линейчатые*, причем прямолинейные образующие их соответствуют друг другу.

на главном основании»; по терминологии Петерсона такая сеть R есть главное основание поверхности S.

Среди геометров, работы которых содействовали расширению или углублению наших сведений о свойствах главного основания, были: Bianchi, Млодзеевский, Voss, Razzaboni, Guichard, E. Cosserat, Raffy, Goursat, Adam, Staeckel, Tzitzeica, Darboux, Егоров, Demoulin, Servant, Drach, Tachauer, Smith, Eisenhart, Segre, Фиников, Бюшгенс, Rouyer, Lagally, Terracini, Liebmann, Schur, Freidank, Schaff и в последнее время Gambier, Маслов, Vasseur, Lovett, Россинский, Lebel, Vincensini.

В дальнейшем мы будем обозначать через R всякую сеть, начерченную на заданной поверхности S и образованную двумя различными семействами действительных или мнимых кривых.

Согласно самому определению сеть R есть *главное основание поверхности* S, если, во-первых, сеть R есть *сопряженная* на поверхности S и, во-вторых, если среди всех поверхностей, наложимых на S, имеются *две* такие различные поверхности S' и S'', отличающиеся от S, на которых сети R' и R'', соответствующие сети R, будут также *сопряженные* [Петерсон (1)].

Если рассматриваемая поверхность S нам дана в криволинейных координатах и притом вполне определенным образом, мы будем писать ее линейный элемент ds в виде $ds^2 = Edu^2 + 2F du\,dv + Gdv^2$. В этом случае каждая сеть R, начерченная на S, может быть рассматриваема как происходящая от *плоской* сети r, начерченной на плоскости UOV и определенной двумя дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{dv}{du} = \psi(u, v), \tag{1}$$

где φ и ψ суть две различные друг от друга функции независимых переменных u и v, непрерывные до частных производных третьего порядка включительно. В дальнейшем мы будем обозначать через (φ, ψ) такую плоскую сеть r.

Плоская сеть (φ, ψ) называется *главным основанием данного линейного элемента* ds, когда среди всех поверхностей, принадлежащих этому линейному элементу, имеется поверхность S, на которой сеть R, определенная сетью (φ, ψ), является главным основанием в смысле Петерсона [С. П. Фиников (5) и также С. С. Бюшгенс (6)].

Теперь естественно возникает интересный вопрос: является ли достаточным условие аналитичности данной поверхности S для того, чтобы она имела главное основание? И если этого условия еще недостаточно, то не имеется ли среди всех аналитических поверхностей S', наложимых на S, такой, которая обладает главным основанием?

На эти трудные вопросы тщетно пытаются отвечать в отрицательном смысле, приводя следующее обычное упрощенное рассуждение: «*Две* функции φ и ψ, определяющие главное основание (φ, ψ) данного линейного элемента ds, должны одновременно удовлетворять системе $(\sum)$ *трех* уравнений с частными производными второго порядка:

$$\Phi\left(E, F, G, \ldots \mid \varphi, \psi, \frac{d\varphi}{du}, \ldots \frac{d^2\psi}{dv^2}\right) = 0, \ \Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0. \tag{Σ}$$

Следовательно, вообще говоря, линейный элемент не имеет главного основания». В действительности этот способ рассуждения весьма затруднительно поддерживать при современном состоянии науки: уравнения с частными производными $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ настолько сложны, что нельзя и думать, чтобы было можно строгим образом *доказать*, путем прямого исключения функций φ, ψ и их частных производных, существование одного или нескольких результатов $\Omega=0$, $\Omega_1=0, \ldots$, связывающих функции E, F, G и их частные производные, таких, *которые заведомо не были бы тождественными нулю*, и следовательно со всей строгостью установить несовместность системы уравнений $(\sum)$ даже при *произвольных* функциях E, F и G. Тем более указанные трудности возрастут в сильнейшей степени, когда имеют дело с каким-нибудь важным частным семейством поверхностей, например, когда дело идет о *поверхностях постоянной кривизны*, для которых E, F и G уже нельзя взять произвольными.

В сложившейся обстановке становится ясной точка зрения таких геометров, как Б. К. Млодзеевский и Д. Ф. Егоров, которые никогда не рассматривали приведенное выше рассуждение как убедительное. Я ограничусь здесь приведением двух цитат из диссертации (1917) и монографии (1937) С. П. Финикова, неоднократно настаивавшего на необходимости иметь научно строгое доказательство существования аналитической поверхности, не имеющей главного основания: «Возникает интересный вопрос, существует ли поверхность, не имеющая главных оснований, и, с другой стороны, может ли быть на поверхности бесконечное множество главных оснований. Первый вопрос до сих пор остается открытым (1917)» ([5]). «Мы не знаем примера, который бы подтвердил эту мысль (1937)» ([7]).

К тому же здесь необходимо различать три совершенно разные проблемы:

1) *узнать существует ли* а н а л и т и ч е с к а я *или даже* а л г е б р а и ч е с к а я *поверхность S, не имеющая главного основания*;

2) *узнать, существует ли аналитическая поверхность S, не имеющая главного основания так же, как и все аналитические поверхности S', наложимые на S*;

3) *узнать, существует ли аналитическая поверхность S, имеющая главное основание так же, как и* в с е *аналитические поверхности S', наложимые на S*.

Мы ответим на вопросы 1) и 2) в утвердительном смысле, а на вопрос 3) отрицательно.

2. *Уравнения, определяющие главное основание* (φ, ψ). Прежде всего мы напишем систему уравнений с частными производными, которым должны удовлетворять функции φ и ψ. Аналогичные системы были составлены: С. П. Финиковым ([5]) в почти явном виде и С. С. Бюшгенс ([6]) в неявном виде*, обе в 1917 г.

Мы отправляемся от двух уравнений Codazzi с частными производными:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta}{\partial v}-\frac{\partial\delta'}{\partial u}+p\delta+p'\delta'+p''\delta''=0,\\ &\frac{\partial\delta''}{\partial u}-\frac{\partial\delta'}{\partial v}+q\delta+q'\delta'+q''\delta''=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

* Весьма вероятно, что эта неявность вида системы уравнений, определяющих (φ, ψ), и явилась причиной, помешавшей автору вывести из своей системы существование аналитической поверхности, не имеющей главного основания. В самом деле, с одной стороны, было невозможно принимать всерьез в 1917 г. указанное выше упрощенное рассуждение, которое в конечном счете является лишь эффектом рутины, не соответствуя нисколько современному состоянию науки. С другой стороны, самое отсутствие в то время теоремы относительно системы уравнений с частными производными, которая была дана в моем предыдущем сообщении [ДАН, XVIII, № 8 (1938)], не могло послужить препятствием для столь сильного геометра.

и от конечного уравнения Гаусса:

$$\delta\delta'' - \delta'^2 = K, \tag{3}$$

где

$$p = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad p' = -2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad p'' = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

$$q = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad q' = -2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad q'' = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

и где K есть полная кривизна поверхности S.

Таким образом p, p', p'', q, q', q'' суть (до коэффициента) символы Кристоффеля, и поэтому все они, как и полная кривизна K, суть дифференциальные выражения, зависящие только от букв E, F, G и их частных производных. Что же касается δ, δ' и δ'', то это суть приведенные коэффициенты

$$\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}},$$

второй квадратичной формы $Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2$ поверхности S. Известно, что поверхность S вполне определяется (до положения в пространстве) знанием шести функций $E, F, G, \delta, \delta', \delta''$ независимых переменных u, v; такая поверхность будет нами обозначаться через $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$. Известно наконец, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы какая-нибудь сеть R, начерченная на поверхности S и определяющаяся плоской сетью $r = (\varphi, \phi)$, была *сопряженной* сетью на S, является наличие равенства

$$\delta\varphi\phi + \delta'(\varphi + \phi) + \delta'' = 0. \tag{4}$$

Переходя теперь к выводу уравнений главного основания (φ, ϕ) данного линейного элемента ds, $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$, мы начинаем с выполнения подстановки*

$$\delta = ax + \frac{b}{x}, \quad \delta' = -ax\varphi - \frac{b}{x}\phi, \quad \delta'' = ax\varphi^2 + \frac{b}{x}\phi^2, \tag{5}$$

где a, b, x, φ, ϕ суть *какие-нибудь* функции независимых переменных u, v, причем две функции a и b постоянно связаны соотношением

$$ab = \frac{K}{(\phi - \varphi)^2}. \tag{6}$$

Тотчас же убеждаемся в том, что уравнение (3) Гаусса и условие (4) удовлетворены тождественно, каковы бы ни были a, b, x, φ и ϕ, лишь бы a и b были связаны соотношением (6). Отсюда следует, что если оба уравнения (2) Codazzi будут удовлетворены выражениями (5) для δ, δ' и δ'', тогда сеть R, начерченная на поверхности $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$ и определенная плоской сетью $r = (\varphi, \phi)$, окажется *сопряженной*. Но результат подстановки (5) в уравнения (2) Codazzi имеет вид:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A_0X^2 + A_1X + A_2, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = B_0X^2 + B_1X + B_2, \tag{7}$$

где $X = x^2$ и где $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ суть дифференциальные выражения, содержащие только буквы $E, F, G, \varphi, \phi, a$ и b и их частные производные. Ясно, что *необходимым* (но не достаточным) условием для того,

---

* Ср. С. С. Бюшгенс, Диссертация ([6]), стр. 16.

чтобы система (7) допускала своим решением X, является требование, чтобы X был корнем квадратного уравнения:

$$\left\{\frac{\partial A_0}{\partial v}-\frac{\partial B_0}{\partial u}+\begin{vmatrix} A_0 A_1 \\ B_0 B_1 \end{vmatrix}\right\}X^2+\left\{\frac{\partial A_1}{\partial v}-\frac{\partial B_1}{\partial u}+2\begin{vmatrix} A_0 A_2 \\ B_0 B_2 \end{vmatrix}\right\}X+$$

$$+\left\{\frac{\partial A_2}{\partial v}-\frac{\partial B_2}{\partial u}+\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{vmatrix}\right\}=0, \tag{8}$$

которое можно написать в сокращенном виде

$$\Phi X^2+\Phi_1 X+\Phi_2=0. \tag{8*}$$

Лемма. *Если линейный элемент ds дан, необходимым и достаточным условием для того, чтобы сеть (φ, ψ) была* **главным основанием** *линейного элемента ds, является наличие трех одновременных равенств* $\Phi=0$, $\Phi_1=0$ *и* $\Phi_2=0$.

В самом деле, если (φ, ψ) есть главное основание для ds, мы имеем бесчисленное множество поверхностей $S(E, F, G, \delta, \delta', \delta'')$, на которых соответствующая сеть R будет главным основанием; поэтому должно иметься бесконечное множество различных решений X системы (7); отсюда тотчас же следует, что $\Phi=0$, $\Phi_1=0$ и $\Phi_2=0$. Значит, это условие есть *необходимое*. С другой стороны, если мы имеем $\Phi=0$, $\Phi_1=0$ и $\Phi_2=0$, интегрирование *одного только* уравнения Riccati нам дает бесконечное множество решений $X=\frac{C\alpha+\beta}{C\gamma+1}$, зависящих от произвольного параметра C, причем α, β и γ суть вполне определенные функции независимых переменных u, v. Отсюда мы заключаем, что формулы (5) нам дают бесконечное множество поверхностей S, на которых соответствующая сеть R есть сопряженная. Следовательно (φ, ψ) есть *главное основание* линейного элемента ds. Таким образом это условие есть *достаточное*, что и требовалось доказать.

Чтобы получить уравнения, определяющие главное основание (φ, ψ), в окончательной *явной* форме, мы вводим оператор $\Delta_f z$, определяемый равенством:

$$\Delta_f z=\frac{\partial z}{\partial v}+f\frac{\partial z}{\partial u}, \tag{9}$$

где z и f суть какие-нибудь функции независимых переменных u, v. Надо заметить, что этот оператор обладает свойствами обыкновенной производной:

$$\Delta_f(z_1+z_2)=\Delta_f z_1+\Delta_f z_2,\quad \Delta_f(z_1 z_2)=\Delta_f z_1\cdot z_2+z_1\Delta_f z_2,\quad \Delta_f\log z=\frac{\Delta_f z}{z}$$

и кроме того

$$\Delta_g\Delta_f z-\Delta_f\Delta_g z=\frac{\Delta_g f-\Delta_f g}{g-f}\cdot(\Delta_g z-\Delta_f z). \tag{10}$$

Наконец, для сокращения, мы полагаем: $p(z)=p-p'z+p''z^2$, $q(z)=q-q'z+q''z^2$.

Теперь *детальное вычисление дифференциальных выражений* Φ, Φ_1 *и* Φ_2 *нас приводит к уравнениям, определяющим обе функции* φ *и* ψ *главного основания* (φ, ψ), *написанным в окончательной явной форме:*

$$\Delta_\varphi\log\left\{\frac{\Delta_\varphi\varphi-\begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{K}\right\}+\frac{3\Delta_\varphi\varphi-\Delta_\psi\varphi-2\begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi-\varphi}=0; \tag{I}$$

$$\Delta_\varphi \left\{ \Delta_\psi \log \sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\psi \psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} \right\} +$$

$$+ \frac{\Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} \left\{ \Delta_\psi \log \sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} + \frac{\Delta_\psi \psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} \right\} +$$

$$+ \Delta_\psi \left\{ \Delta_\varphi \log \sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} - \frac{\Delta_\varphi \varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} \right\} +$$

$$+ \frac{\Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} \left\{ \Delta_\varphi \log \sqrt{K} + \frac{\Delta_\psi \varphi - \Delta_\varphi \psi}{\psi - \varphi} - \frac{\Delta_\varphi \varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} \right\} +$$

$$+ 2\, \frac{\Delta_\varphi \varphi - \begin{vmatrix} p(\varphi) & 1 \\ q(\varphi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} \cdot 2\, \frac{\Delta_\psi \psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \psi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} = 0; \qquad \text{(II)}$$

$$\Delta_\psi \log \left\{ \frac{\Delta_\psi \psi - \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \psi \end{vmatrix}}{K} \right\} - \frac{3\Delta_\psi \psi - \Delta_\varphi \psi - 2 \begin{vmatrix} p(\psi) & 1 \\ q(\psi) & \varphi \end{vmatrix}}{\psi - \varphi} = 0. \qquad \text{(III)}$$

В дальнейшем мы будем писать систему (Σ) этих уравнений в сжатой форме

$$\Phi = 0 \ \text{(I)}; \quad \Phi_1 = 0 \ \text{(II)}; \quad \Phi_2 = 0 \ \text{(III)}. \qquad (\Sigma)$$

Из этих уравнений мы извлечем решение поставленных проблем.

Поступило
4 III 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. М. Петерсон, Матем. сб., **1**, 391—438 (1866). [2] A. Ribaucour, C. R., **113**, 304, 324—326 (1891). [3] K. Peterson, Über Curven u. Flächen (1868). [4] K. Peterson, Ann. de Toulouse, série 2, **7**, 5—107 (1905). [5] С. П. Фиников, Общая задача изгибания на главном основании (Диссертация, Москва, 1917). [6] С. С. Бюшгенс, Об изгибании поверхностей на главном основании (Диссертация, Москва, 1917). [7] С. П. Фиников, Изгибание на главном основании (1937).