Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

МАТЕМАТИКА

Н. В. АДАМОВ

О НАХОЖДЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 II 1938)

1. В предыдущей заметке [1] мной указаны для уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

некоторые свойства последовательных приближений, осуществляемых при помощи оператора

$$A[y] = y(x) + \int_a^x Y\,dx - X\,dy; \quad Y = Xf(x, y).$$

Покажем теперь возможность применения последовательных приближений вида, близкого к виду A, для отыскания периодических решений уравнения (1). Функцию $f(x, y)$ предположим непрерывной в области $D\,(-\infty < x < +\infty;\ a \leqslant y \leqslant b)$, периодической с периодом ω:

$$f(x, y) = f(x + \omega, y),$$

допускающей в области D непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Введем в рассмотрение оператор

$$B[y] = y(x) + e^{-kx} \int_0^x e^{kx} [f(x, y) - y']\,dx.$$

При помощи рассуждений, аналогичных приведенным в упомянутой выше заметке [1], убедимся, что если 1) оператор B имеет смысл для функций некоторого семейства

$$y = \varphi(x, y_0),$$

где y_0 есть значение функции $\varphi(x, y_0)$ для $x = 0$, 2) кривые $y = B[\varphi(x, y_0)]$ лежат в области D и 3) кривые $y = \varphi(x, y_0)$ образуют поле в области D, т. е. через каждую точку области проходит одна и только одна кривая семейства, то и кривые $y = B[\varphi(x, y_0)]$ образуют поле в области D. Для доказательства достаточно убедиться, что производная

$$\frac{\partial}{\partial y_0} B[y] = e^{-kx} \int_0^x e^{kx} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k\right) \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dx + e^{-kx} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)_{x=0} \right\}$$

положительна, если положительна производная $\frac{\partial y}{\partial y_0}$.

Неравенство

$$\frac{\partial}{\partial y_0} B[y] > 0$$

имеет место одновременно с неравенством

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} > 0,$$

если для всех значений x

$$\frac{\partial f}{\partial y} + k > 0, \tag{2}$$

а это последнее неравенство справедливо, если постоянная k положительна и достаточно велика, что мы и предполагаем в дальнейшем.

Отсюда следует, что для оператора B имеют силу теоремы:

Теорема I. *Если кривые:*

$$y = y_0(x); \quad y = y_1(x) = B[y_0]; \quad y = y_2(x) = B[y_1]; \quad \ldots,$$

лежат в области D для всех значений x и если для всех x справедливо неравенство

$$y_0(x) > \bar{y}(x),$$

где $y = \bar{y}(x)$—интегральная кривая уравнения (1), *лежащая в области D, то справедливы и неравенства:*

$$y_1(x) > \bar{y}(x); \quad y_2(x) > \bar{y}(x); \quad \ldots$$

Теорема II. *Если неравенство*

$$y_1(x) = B[y_0] < y_0(x)$$

справедливо для всех значений $x > 0$, то и неравенства:

$$y_2(x) = B[y_1] < y_1(x); \quad y_3(x) = B[y_2] < y_2(x); \quad \ldots,$$

справедливы для всех значений $x > 0$ (для которых кривые: $y = y_0(x)$, $y = y_1(x)$, ... принадлежат области D).

Напомним, что для доказательства этих теорем в предыдущей статье мы пользовались только тем свойством оператора, в силу которого поле кривых переходит в поле же.

Возможность применения оператора B к некоторым функциям, определенным для всех значений x, вытекает из следующего предложения: *если $y_0(x)$—непрерывная периодическая функция и если оператор B имеет смысл в применении к этой функции для $0 \leqslant x \leqslant \omega$*, то $y_1(x) = B[y_0]$ *есть ограниченная для всех значений x функция.*

В самом деле, для $0 \leqslant x \leqslant \omega$ имеем:

$$y_1(x + n\omega) = y_0(x + n\omega) + e^{-k(x+n\omega)} \int_0^{x+n\omega} e^{kx}[f(x, y_0) - y_0'] \, dx = y_0(x) +$$

$$+ e^{-kx} \left\{ e^{-kn\omega} \left[\int_0^{n\omega} e^{kx}[f(x, y_0) - y_0'] \, dx + e^{kn\omega} \int_0^{x} e^{kx}[f(x, y_0) - y_0'] \, dx \right] \right\}.$$

Обозначая:

$$\int_0^{\omega} e^{kx}[f(x, y_0) - y_0'] \, dx = h; \quad e^{k\omega} = q,$$

учитывая, что

$$\int\limits_{n\omega}^{n\omega+x} e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx = e^{k\omega}\int\limits_{(n-1)\omega}^{(n-1)\omega+x} e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx,$$

имеем:

$$y_1(x+n\omega) = y_0(x) +$$

$$+e^{-kx}\left\{q^{-n}(h+hq+\ldots+hq^{n-1})+\int\limits_0^x e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx\right\} =$$

$$= y_0(x)+e^{-kx}\left[\int\limits_0^x e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx+\frac{h}{q-1}\right]-\frac{h}{(q-1)q^n}e^{-kx}.$$

При неограниченном возрастании n и при $k>0$ получаем:

$$\overline{y}_1(x) = \lim_{n\to\infty} y_1(x+n\omega) = y_0(x)+e^{-kx}\left[\int\limits_0^x e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx+\frac{h}{q-1}\right].$$

Легко видеть, что $\overline{y}_1(x)$—периодическая функция:

$$\overline{y}_1(\xi+\omega) = y_0(\xi+\omega)+e^{-k\xi}\left[e^{-k\omega}\int\limits_0^{\omega} e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx+\right.$$

$$\left.+e^{-k\omega}\int\limits_{\omega}^{\omega+\xi} e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx+\frac{he^{-k\omega}}{q-1}\right] =$$

$$= y_0(\xi)+e^{-k\xi}\left[\frac{h}{q}+\int\limits_0^{\xi} e^{kx}[f(x, y_0)-y_0']\,dx+\frac{h}{q(q-1)}\right] = \overline{y}_1(\xi).$$

2. Докажем теперь

Теорему III. *Если в области D есть периодическое решение $\overline{y}(x)$ уравнения (1) и если известна периодическая функция $y_0(x)$ такая, что*

$$y_0(x) > \overline{y}(x)$$

и

$$y_0(x) > y_1(x) = B[y_0]$$

для $0 < x \leqslant \omega$, то периодическое решение может быть найдено последовательными приближениями.

Последнее условие теоремы удовлетворяется например тогда, когда кривая $y=y_0(x)$, где $y_0(x)$ — периодическая функция, пересекается интегральными кривыми в одном и том же направлении [кривая $y=y_0(x)$ есть кривая без контактов]. Легко видеть, что к этому случаю часто может быть сведена преобразованием переменных задача об отыскании предельного цикла для уравнения:

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}. \qquad (1')$$

Например уравнение (1′) после перехода к полярным координатам принимает вид:

$$\frac{d\rho}{d\Theta} = \varphi(\rho, \Theta)$$

и $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$ не обращается в ∞ в кольце: $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, а круг $\rho=\rho_1$ пересекается интегральными кривыми только в одном направлении.

Мы строим последовательность функций:

$$\bar{y}_0(x),\quad \bar{y}_1(x),\quad \bar{y}_2(x)\ \ldots,\quad \bar{y}_n(x)\ \ldots, \tag{3}$$

где

$$\bar{y}_0(x)=y_0(x);\ \bar{y}_{n+1}(x)=B_1[\bar{y}_n]=\bar{y}_n(x)+$$

$$+e^{-kx}\left[\int\limits_0^x e^{kx}[f(x,\bar{y}_n)-\bar{y}_n']\,dx+\frac{h_n}{q-1}\right];$$

$$h_n=\int\limits_0^\omega e^{kx}[f(x,\bar{y}_n)-\bar{y}_n']\,dx;\quad q=e^{k\omega};\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Эта последовательность монотонная:

$$\bar{y}_{n+1}(x)<\bar{y}_n(x)\qquad (n=0, 1, 2, \ldots);$$

для доказательства достаточно убедиться, что из неравенства

$$\bar{y}_1(x)<\bar{y}_0(x)$$

следует неравенство

$$\bar{y}_2(x)<\bar{y}_1(x).$$

В самом деле, мы знаем, что:

$$B[y_1]<y_1(x)\qquad (x>0),$$

где

$$y_1(x)=B[y_0]$$

(см. теорему II выше), кроме того:

$$\bar{y}_1(x)=y_1(x)+\frac{h_0}{q-1};\quad h_0=\int\limits_0^\omega e^{kx}[f(x,y_0)-y_0']\,dx<0. \tag{4}$$

По формуле Грина:

$$\int\limits_0^\xi e^{kx}[f(x,y_1)-y_1']\,dx-\int\limits_0^\xi e^{kx}[f(x,\bar{y}_1)-\bar{y}_1']\,dx+\int\limits_{\bar{y}_1(\xi)}^{y_1(\xi)} e^{k\xi}\,dy-$$

$$-\int\limits_{\bar{y}_1(0)}^{y_1(0)} dy=\iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+k\right)e^{kx}\,dx\,dy,$$

где D'—область, заключенная между кривыми: $y=y_1(x)$ и $y=\bar{y}_1(x)$, и прямыми: $x=0$ к $x=\xi$; следовательно:

$$\int\limits_0^\xi e^{kx}[f(x,y_1)-y_1']\,dx-\int\limits_0^\xi e^{kx}[f(x,\bar{y}_1)-\bar{y}_1]\,dx=$$

$$=\iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+k\right)e^{kx}\,dx\,dy>0$$

в силу (2) и (4). Так как

$$\int\limits_0^\xi e^{kx}[f(x,y_1)-y_1']\,dx<0,$$

то и

$$\int\limits_0^{\xi} e^{kx}\,[f(x,\,\overline{y}_1)-\overline{y}_1']\,dx<0,$$

откуда

$$B[\overline{y}_1]<\overline{y}_1(x);\qquad B_1[\overline{y}_1]<\overline{y}_1(x).$$

Последовательность (3) ограничена снизу, так как любая из функций, входящих в эту последовательность, более $\overline{y}(x)$ — периодического решения уравнения (1) (по теореме I); следовательно последовательность сходится. Назовем предельную функцию

$$Y(x)=\lim_{n\to\infty}\overline{y}_n(x).$$

Докажем, что последовательность сходится равномерно. Имеем по формуле Грина:

$$\overline{y}_n(\xi)-\overline{y}_{n+1}(\xi)=\overline{y}_{n-1}(\xi)-\overline{y}_n(\xi)+$$

$$+e^{-k\xi}\left[\iint\limits_{D_n}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+k\right)e^{kx}\,dx\,dy+\int\limits_{\overline{y}_{n-1}(\xi)}^{\overline{y}_n(\xi)}e^{k\xi}dy+\int\limits_{\overline{y}_n(0)}^{\overline{y}_{n-1}(0)}dy+\frac{h_{n-1}-h_n}{q-1}\right];$$

здесь область D_n задана неравенствами:

$$0\leqslant x\leqslant\xi;\quad \overline{y}_n(x)\leqslant y\leqslant\overline{y}_{n-1}(x).$$

Принимая во внимание равенство:

$$h_{n-1}=(q-1)\,[\overline{y}_n\ (0)-y_{n-1}(0)],\qquad (5)$$

имеем:

$$\overline{y}_n(\xi)-\overline{y}_{n+1}=e^{-k\xi}\left(H_n-\frac{h_n}{q-1}\right),$$

где

$$H_n=\iint\limits_{D_n}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+k\right)e^{kx}dx\,dy.$$

Ряд $|h_0|+|h_1|+\ldots|h_n|+\ldots$ сходится в силу равенства (5) и сходимости последовательности (3). Точно так же сходится ряд

$$\overline{H}_0+\overline{H}_1+\ldots+\overline{H}_n+\ldots,$$

где $\overline{H}_n$ есть двойной интеграл:

$$\iint\limits_{D'_n}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+k\right)e^{kx}dx\,dy,$$

распространенный на область D'_n, заключенную между кривыми:

$$x=0,\quad x=\omega,\quad y=\overline{y}_n(x),\quad y=\overline{y}_{n-1}(x).$$

В самом деле, сумма

$$\overline{H}_0+\overline{H}_1+\ldots+\overline{H}_m$$

меньше двойного интеграла

$$\iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+k\right)e^{kx}dx\,dy,$$

распространенного на область D', заключенную между кривыми:

$$x=0, \quad x=\omega, \quad y=y_0(x), \quad y=\overline{y}(x).$$

Так как

$$H_n < \overline{H}_n,$$

имеем:

$$0 < y_n(x) - y_{n+1}(x) < \overline{H}_n + \left|\frac{h_n}{q-1}\right|;$$

выражение в правой части неравенства есть общий член сходящегося ряда с постоянными положительными членами. Последовательность (3) таким образом сходится равномерно. Преобразуя оператор B_1 при помощи интегрирования по частям:

$$B_1[y] = y(0)\,e^{-kx} + e^{-kx}\left[\int_0^x e^{kx}\,[f(x, y) + ky]\,dx + \frac{h}{q-1}\right]$$

и принимая во внимание только что доказанное, убеждаемся, что равномерно же сходится и последовательность производных:

$$\overline{y}_0'(x), \quad \overline{y}_1'(x), \ \ldots, \ \overline{y}_n'(x), \ \ldots$$

Отсюда предельное равенство:

$$Y(x) = Y(x) + e^{-kx}\int_0^x e^{kx}\,[f(x, Y) - Y']\,dx,$$

т. е. $Y(x)$ есть решение уравнения (1). Это решение периодическое, как предел равномерно сходящейся последовательности периодических функций. Оно совпадает с решением $\overline{y}(x)$, если конечно между $y_0(x)$ и $\overline{y}(x)$ нет других периодических решений. Легко показать (мы на этом останавливаться не будем), что если в области D нет периодического решения, а функция $y_0(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы III, найдена, то последовательность (3) не может сходиться в области D.

Поступило
23 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Адамов, ДАН, XVIII, № 4—5 (1938).