Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

МАТЕМАТИКА

Л. В. КЕЛДЫШ

РЕШЕТА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА, ИЗМЕРИМЫЕ B

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 II 1938)

Целью настоящей работы является изучение строения элементарных решет, определяющих множества, измеримые B, но предварительно нам приходится несколько остановиться на изучении измеримых B решет более общего вида.

Мы называем «гребенкой» множество, состоящее из отрезков некоторого прямоугольника, равных и параллельных одной из его сторон, и «гребенчатым решетом» Γ систему гребенок, отрезки которых параллельны оси OY, такую, что каждая гребенка входит не более, чем в конечное число других гребенок, и две различные гребенки системы либо не пересекаются либо одна лежит внутри другой.

Гребенка, входящая в $k-1$ гребенок, называется гребенкой ранга k, сумму всех гребенок ранга k обозначаем через S_k. Тогда множество E, лежащее в пространстве Бэра I_x, определено решетом Γ, если оно является ортогональной проекцией в I_x множества $\Theta = S_1 . S_2 \ldots S_k \ldots$

Бесконечную последовательность вложенных друг в друга гребенок решета мы будем называть цепью. Если пересечение всех элементов цепи пусто, то мы будем называть цепь пустой. Если все гребенки решета Γ являются измеримыми B элементами* классов α' и α—наименьшее число, большее всех α', то мы будем называть решето α-гребенчатым и обозначать его Γ_α.

В основе наших исследований лежит следующее предложение.

Основная лемма. *Пусть Γ_α есть α-гребенчатое решето, определяющее множество E. Разбивая каждую гребенку решета на сумму не более, чем счетного числа гребенок, и отбрасывая, быть может, некоторые из вновь полученных, мы можем получить новое α-гребенчатое решето, определяющее то же множество E и не имеющее пустых цепей.*

Доказательство этой леммы проводится методом трансфинитной индукции (4). Мы применяем доказанную лемму к изучению элементов, измеримых B. Пусть E—такой элемент класса α; $E = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n_1 n_2 \ldots n_k} E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, где $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ есть элемент класса $< \alpha$. Систему всех $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ мы

* Множество, измеримое B, называется элементом класса α, él α, если оно является пересечением счетного числа B-множеств классов, меньших α. См. (1).

называем образующей системой множества E; в силу основной леммы можно предполагать, что все цепи этой системы непусты и определяют по одной точке множества E. Такие образующие системы мы называем правильными. Легко видеть, что множество E с точностью, быть может, до счетного множества, может быть получено из множеств $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ совершенно так же, как пространство Бэра I_x из интервалов Бэра. Множество $E \cdot E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ мы называем α-порцией множества E и можем построить классификацию измеримых B множеств, содержащихся в E, относительно E совершенно так же, как строится классификация измеримых B множеств в пространстве I_x. Именно, мы говорим, что класс множества $\mathscr{E} \subset E$ относительно E равен β, $\mathrm{cl}\,\mathscr{E}(E) = \beta$, если $\mathscr{E}$ может быть получено, исходя из α-порций множества E, β последовательными операциями перехода к пределу. Если $\mathscr{E}$—элемент класса β относительно E, мы будем писать $\mathscr{E} = \mathrm{él}\,\beta(E)$, если α есть элемент класса β относительно E или—множество класса $< \beta$ относительно E, то $\mathscr{E} \leqslant \mathrm{él}\,\beta(E)$. Если например $\mathscr{E}$ замкнуто относительно E, то $\mathscr{E} = F(E)$ и т. д. Следует заметить, что $\mathrm{cl}\,\mathscr{E}(E)$ существенно зависит от образующей системы элемента E и может меняться при ее изменении. Мы показываем, что

для того, чтобы множество $\mathscr{E}$, лежащее внутри элемента E класса α, было элементом класса $\alpha+1$, необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была образующая система элемента E, $\mathscr{E}$ было не ниже, чем $F_{\sigma\delta}(E)$, если α—число первого рода [$G_\delta(E)$, если α—число второго рода], и чтобы существовала такая образующая система элемента E, что $\mathscr{E} = F_{\sigma\delta}(E)$ [$\mathscr{E} = G_\delta(E)$] (4).

Это предложение легко доказывается на основании известного критерия неповышения класса [(1), стр. 76].

Пусть теперь $E = \mathrm{él}\,\alpha$ задано какой-то правильной образующей системой. Тогда легко построить α-гребенчатое упорядоченное* решето Γ_α, определяющее E, такое, что проекции гребенок в I_x совпадают с образующими множества E. *Чтобы получить прямоугольное решето C, определяющее E, достаточно заменить каждую гребенку решета Γ_α наименьшим прямоугольником, ее содержащим.* Мы будем называть решето C соответствующим данной правильной образующей системе множества E. Если E—произвольное множество, измеримое B, то аналогичное решето для него легко построить, замечая, что E является суммой не более, чем счетного числа элементов (1): $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Систему всех множеств $\{E^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ мы будем называть образующей системой множества E.

Если x—внешняя точка для множества E ($x \not\subset E$), то индексом в точке x прямоугольного решета C, определяющего E, $\mathrm{Ind}_x C$ мы называем индекс в точке x линейного решета, образованного верхними сторонами прямоугольников решета C.

Индексом решета C $\mathrm{Ind}\, C$ мы называем наименьшее трансфинитное число, превосходящее $\mathrm{Ind}_x C$ для всех внешних точек x.

Индекс множества E, измеримого B, или иначе индекс минималь-

---

* Решето называется упорядоченным, если проекции на ось OY верхних сторон гребенок ранга 1, а также верхних сторон гребенок ранга k, подчиненных одной гребенке ранга $k-1$, образуют простую возрастающую последовательность точек.

ного решета *, определяющего E, мы обозначаем $\operatorname{Ind} E$ (обозначение Н. Н. Лузина).

Мы изучаем решета, определяющие множества, измеримые B и соответствующие их правильным образующим системам, показываем, что среди таких решет содержатся и минимальные решета для каждого измеримого B множества, и определяем индексы множеств, измеримых B.

Мы вводим понятие подчиненного решета:

Прямоугольное решето C' называется подчиненным прямоугольному решету C, если оно составлено из прямоугольников решета C (быть может, сжатых в вертикальном направлении), причем при построении решета C' прямоугольники решета C могут сдвигаться наверх, и каждый прямоугольник решета C' может содержаться только в тех прямоугольниках этого решета, в которых он содержится для решета C.

Таким образом ранг каждого прямоугольника в решете C' не больше, чем его ранг в решете C.

Мы доказываем:

Теорема. *Для того чтобы измеримое B множество $\mathcal{E}$ могло быть определено прямоугольным решетом C', подчиненным решету C, соответствующему некоторой правильной образующей системе измеримого B множества E, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{E}$ содержалось в E.*

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности мы, не нарушая общности, рассматриваем случай, когда E является элементом, и замечаем, что предложение очевидно, если $\mathcal{E} \leqslant G_\delta(E)$.

Мы доказываем его для случая $\mathcal{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E)$, разбивая множество $F_\sigma(E)$ на сумму непересекающихся множеств $F_n(E)$ таких, что $F_n(E)$ содержится целиком в некоторой α-порции множества E, не содержащей точек множества $F_1(E)+F_2(E)+\ldots+F_n(E)$. Дальше мы применяем метод трансфинитной индукции.

Кроме того мы доказываем:

Лемма. *Если упорядоченное прямоугольмое решето C' подчинено решету C, определяющему множество E, то для всякой точки x, внешней для E, имеем:* $\operatorname{Ind}_x C' \leqslant \operatorname{Ind}_x C$, *если* $\operatorname{Ind}_x C = \omega^\alpha$, *и* $\operatorname{Ind}_x C' \leqslant (\operatorname{Ind}_x C) \cdot m$, *если* $\operatorname{Ind}_x C = \omega_1^\alpha n + \beta$, $\beta < \omega^\alpha$.

Опираясь на эту лемму, мы доказываем еще ряд лемм, касающихся решет, соответствующих правильным образующим системам множеств, измеримых B (на некоторые из этих лемм опирается и доказательство достаточности в предыдущей теореме), и с помощью этих лемм оцениваем минимальный индекс таких решет для произвольного множества, измеримого B. Затем, используя доказанное нами четвертое неравенство Серпинского для действительных конституант элементарного решета **, мы показываем, что индексы множеств, измеримых B, не могут быть ниже полученных нами минимальных индексов решет, соответствующих правильным образующим системам этих множеств. Пользуясь обозначениями Н. Н. Лузина, мы обозначаем элемент класса α через $\text{él}\,\alpha$, достижимое снизу множество класса α через $\operatorname{Inf}\alpha$, недостижимое множество класса α через $\operatorname{Inac}\alpha$ и класс α множеств, измеримых B, через k_α и получаем следующую таблицу ***:

---

* По определению Н. Н. Лузина решето, определяющее множество E, измеримое B, называется минимальным, если оно имеет наименьший возможный индекс среди всех прямоугольных решет, определяющих E. См. ([2]) стр. 274 [8].

** См. ([3]), стр. 271.

*** См. ([2]), стр. 276 [10]. Заметим, что, обозначая через α^* наибольшее трансфинитное число второго рода, меньшее или равное α, мы имеем: $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geqslant 0$, и $2\alpha = \alpha^* + 2n$.

$$\alpha > 0 \quad K_{2\alpha} \begin{cases} \text{él} & \text{Ind} = \omega^\alpha \\ \text{Inf} & \text{Ind} = \omega^\alpha + 1 \\ \text{Inac} & \text{Ind} = \omega^\alpha + 1 \end{cases}$$

$$\alpha > 0 \quad K_{2\alpha+1} \begin{cases} \text{él} & \text{Ind} = \omega^\alpha \cdot 2 \\ \text{Inf} & \text{Ind} = \omega^\alpha + 1 \\ \text{Inac} & \omega^\alpha \cdot 2 \leqslant \text{Ind} \leqslant \omega^{\alpha+1} \end{cases}$$

Для множеств $E = \text{Inac}(2\alpha + 1)$ достигаются и верхний и нижний индексы, указанные в таблице.

Используя полученные результаты, мы легко показываем, что данные нами ранее верхние оценки классов внешних конституант A множества (³) являются точными.

Поступило
22 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques (1930). [2] N. N. Lusin, Ann. d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (1933). [3] Л. В. Келдыш, ИМЕН, Серия матем, № 2 (1937). [4] Л. В. Келдыш, ИМЕН, Серия матем., № 1 (1938).