Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

МАТЕМАТИКА

А. ШЕЦЕЛЕВСКИЙ

О ВЕРОЯТНОСТНОЙ СХЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПИРСОНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 II 1938)

В настоящей заметке, следуя идее Пирсона, я рассматриваю его кривые не как предельные, а предлагаю совершенно элементарную вероятностную схему, соответствующую разностному уравнению Пирсона в самом общем его виде. Мной показано (2), что все разнообразие кривых, заключающееся в дифференциальном уравнении Пирсона, содержится уже в разностном уравнении (до перехода к производным).

Пусть имеем n факторов, определяющих величину x. Вероятность подействовать первому равна p, $(1-p=q)$. Если уже подействовало k_1 факторов и k_2 определились как не подействовавшие $(k_1+k_2=k)$, то вероятность подействовать $k+1$-му будет p_k, $(1-p_k=q_k)$. Если $k+1$-й фактор подействует, то

$$p_{k+1}=f(k)\,\varphi(k_1)\,p_k, \qquad q_{k+1}=f(k)\,q_k, \tag{1}$$

если же не подействует, то в силу симметрии

$$p_{k+1}=f(k)\,p_k, \qquad q_{k+1}=f(k)\,\psi(k_2)\,q_k. \tag{2}$$

Легко убедиться, что вероятность y_x величине x иметь данное значение есть:

$$y_x=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x q^{n-x} f(0)^{n-1} f(1)^{n-2}\ldots f(n-2)\,\varphi(0)^{x-1}\varphi(1)^{x-2}\ldots$$
$$\ldots\varphi(x-2)\,\psi(0)^{n-x-1}\psi(1)^{n-x-2}\ldots\psi(n-x-2). \tag{3}$$

Для случая схемы невозвращенных шаров:

$$f(k)=1+\frac{1}{N-1-k}, \quad \varphi(k_1)=1-\frac{1}{Np-k_1}, \quad \psi(k_2)=1-\frac{1}{Nq-k_2},$$

где N—число шаров в урне, Np и Nq—числа белых и черных шаров.

Из формулы (3) получаем:

$$\frac{y_{x+1}-y_x}{y_{x+1}+y_x}=\frac{(n-x)\,p\,\varphi(0)\,\varphi(1)\ldots\varphi(x-1)-(x+1)\,q\,\psi(0)\,\psi(1)\ldots\psi(n-x-2)}{(n-x)\,p\,\varphi(0)\,\varphi(1)\ldots\varphi(x-1)+(x+1)\,q\,\psi(0)\,\psi(1)\ldots\psi(n-x-2)}. \tag{4}$$

Функции f, φ и ψ не могут быть заданы произвольными. Для всех значений n и x они удовлетворяют соотношению:

$$[p\,\varphi(0)\,\varphi(1)\,\ldots\,\varphi(x)+q\,\psi(0)\,\psi(1)\,\ldots\,\psi(n-x)]\,f(0)\,f(1)\ldots f(n)=1. \tag{5}$$

Обозначим:

$$\varphi(0)\,\varphi(1)\,\ldots\,\varphi(x)=\Phi(x+1), \quad \psi(0)\,\psi(1)\,\ldots\,\psi(n-x)=F(n-x+1),$$
$$f(0)\,f(1)\,\ldots\,f(n)=\Theta(n+1);$$

тогда из (4) и (5):

$$[p\Phi(x+1)+qF(n-x)]\,\Theta(n)=1, \tag{6}$$

$$\frac{y_{x+1}-y_x}{y_{x+1}+y_x}=\frac{(n-x)\,p\,\Phi(x)-(x+1)\,qF(n-x-1)}{(n-x)\,p\,\Phi(x)+(x+1)\,qF(n-x-1)}. \tag{7}$$

Из (6) получаем:

$$qF(n-x-1)=\frac{1}{\Theta(n-1)}-p\Phi(x)=\frac{1}{\Theta(n)}-p\Phi(x+1)=\ldots;$$

отсюда

$$p[\Phi(x+1)-\Phi(x)]=\frac{1}{\Theta(n)}-\frac{1}{\Theta(n-1)}$$

или

$$\Delta\Phi(x)=\frac{1}{p}\Delta\left[\frac{1}{\Theta(n-1)}\right]=\frac{\gamma}{p}, \tag{8}$$

$$\Phi(x)=\frac{\gamma(x+a)}{p}, \tag{9}$$

где γ и a не зависят от x и n.

Аналогично из (6) получаем:

$$F(n-x)=\frac{\gamma(n-x)+b}{q}, \tag{10}$$

$$\Theta(n)=\frac{1}{\gamma n+c}; \tag{11}$$

отсюда

$$f(k)=1-\frac{1}{k+\dfrac{c}{\gamma}+1},\quad \varphi(k_1)=1+\frac{1}{k_1+\dfrac{a}{\gamma}},\quad \psi(k_2)=1+\frac{1}{k_2+\dfrac{b}{\gamma}}. \tag{12}$$

Подставляя (9), (10) и (11) в (5), получим:

$$a+b=c-\gamma. \tag{13}$$

Уравнение (7) обращается в уравнение Пирсона:

$$\frac{\Delta y_x}{y_{x+1}+y_x}=\frac{A-x}{Bx^2+Cx+D}$$

$$A=\frac{an-b+\gamma}{c-2\gamma},\quad B=-\frac{2\gamma}{c-2\gamma},\quad C=\frac{(2n-3)\gamma-a+b}{c-2\gamma},$$

$$D=\frac{(a+2\gamma)n+b-\gamma}{c-2\gamma} \tag{14}$$

Его решением будет (3), которое обращается в:

$$y_x=\frac{pq}{\gamma}\,\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{c}{\gamma}+2\right)\Gamma\left(\dfrac{a}{\gamma}+x\right)\Gamma\left(\dfrac{b}{\gamma}+n-x\right)}{\Gamma\left(\dfrac{c}{\gamma}+n\right)\Gamma\left(\dfrac{a}{\gamma}+2\right)\Gamma\left(\dfrac{b}{\gamma}+2\right)}. \tag{15}$$

Величины a, b и γ почти ничем не связаны и можно ими располагать так, чтобы B, C и D приняли произвольные значения. В частном случае a, b и γ могут быть отрицательными. Единственными ограничениями являются условия:

$$0\leqslant y_x\leqslant 1,\quad \sum_{x=0}^{n} y_x=1,$$

на которых мы не будем останавливаться, так как им легко удовлетворить, не налагая на a, b и γ особых ограничений.

Главная геофизическая обсерватория.
Ленинград.

Поступило
21 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Шепелевський, Журн. математ. циклу А. Н. УССР, № 2 (6) (1932).