Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XIX, № 1—2

МАТЕМАТИКА

Н. С. СМИРНОВ

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ К НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 II 1938)

Интеграл Фурье (как и его модификации) неоднократно применялся к решению линейных интегральных уравнений. Ниже даются, как мне кажется, впервые некоторые применения интеграла Фурье к нелинейным интегральным уравнениям.

Лемма. *Уравнение*

$$\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + a_1\xi + a_0 = 0, \tag{1}$$

у которого

$$|a_i| < \frac{cA^n}{|s^b|^n} \qquad (i=0,\, 1,\, \ldots,\, n-1), \tag{2}$$

причем вещественная часть $Rs = \alpha > 0$, $0 < A < \alpha^b$, $b > 1$ и

$$c = \frac{1}{2^n}, \tag{3}$$

имеет корни по модулю меньшие, чем $\dfrac{A}{|s^b|}$.

Доказательство. Обозначим левую часть (1) через $f(\xi)$. Для доказательства леммы достаточно показать, что при $|\xi| \geqslant \dfrac{A}{|s^b|}$ $|f(\xi)| > 0$. В самом деле по (2) имеем:

$$|f(\xi)| \geqslant |\xi|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k > |\xi|^n - \frac{cA^n}{|s^b|^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k. \tag{3'}$$

При $|\xi| \leqslant 1$ будет

$$|f(\xi)| > |\xi|^n - \frac{cA^n \cdot n}{|s^b|^n},$$

что > 0 при $|\xi| \geqslant \dfrac{A}{|s^b|}$, так как $c \cdot n = \dfrac{n}{2^n} \leqslant 1$. При $|\xi| > 1$

$$|f(\xi)| > |\xi|^n - \frac{cA^n}{|s^b|^n} \cdot \frac{1 - |\xi|^n}{1 - |\xi|},$$

что будет > 0 при $1 + \dfrac{cA^n}{|s^b|^n} < \xi < 2$, так как $\dfrac{cA^n}{|s^b|^n} < 1$. Таким образом всегда имеем, что корни (1) $|\xi|<2$. Подставляя теперь в крайний правый член неравенства (3′) $|\xi|=2$, имеем:

$$|f(\xi)|>|\xi|^n-\frac{cA^n}{|s^b|^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k=|\xi|^n-\frac{cA^n}{|s^b|^n}(2^n-1).$$

Последнее выражение >0 при $|\xi|\geqslant\frac{A}{|s^b|}$, так как $c(2^n-1)<1$.

Теорема 1. *Интегральное уравнение*

$$K_0(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty K_k(xy_1\ldots y_k)\,u(y_1)\ldots u(y_k)\,dy_1\ldots dy_k\equiv\mathfrak{N}(x;\ u), \quad (4)$$

где $K_k\,(k=0,1,\ldots,n)$ — заданные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие условиям, что для интегралов

$$[K_k]\equiv\int_0^\infty x^{-s}K_k(x)\,dx \qquad (Rs=\alpha>0,\ k=0,1,\ldots,n)$$

выполняются условия:

$$\left|\frac{[K_k]}{[K_n]}\right|<\frac{cA^n}{|s^b|^n} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1), \quad (5)$$

$0<A<\alpha^b$; $c=\frac{1}{2^n}$, $b>1$, *имеет не более n ограниченных решений, которые все выражаются в виде*

$$u_r(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}y^{-s}F_r(s)\,ds \qquad (r=1,2,\ldots,n), \quad (6)$$

где $F_r(s)$ суть корни алгебраического уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n}[K_k]\xi^k-[K_0]=0. \quad (7)$$

Доказательство. В силу (5) уравнение (7) можно разделить на $[K_n]$, после чего переписать в виде

$$\xi^n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[K_k]}{[K_n]}\xi^k-\frac{[K_0]}{[K_n]}=0.$$

По предыдущей лемме его корни $|\xi|<\frac{A}{|s|^b}$. Положим $\xi=\int_0^\infty x^{s-1}u^*(x)\,dx$, в силу чего (7) перепишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}[K_k]\left(\int_0^\infty x^{s-1}u^*(x)\,dx\right)^k-[K_0]=0$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty K_k(\omega)\,\omega^{-s}d\omega\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty(y_1\ldots y_k)^{s-1}u^*(y_1)\ldots u^*(y_k)\,dy_1\ldots dy_k-$$
$$-\int_0^\infty K_0(x)\,x^{-s}\,dx=0.$$

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty K_k(\omega)\,\omega^{-s}\,d\omega\,(y_1\ldots y_k)^{s-1}\,u^*(y_1)\ldots u^*(y_k)\,dy_1\ldots dy_k -$$

$$-\int_0^\infty K_0(x)\,x^{-s}\,dx = 0.$$

Делая замену переменных в интегралах $\int_0^\infty K_k(\omega)\,\omega^{-s}\,d\omega$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, полагая $\omega = xy_1\ldots y_k$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty K_k(xy_1\ldots y_k)\,x^{-s}\,dx\,u^*(y_1)\ldots u^*(y_k)\,dy_1\ldots dy_k -$$

$$-\int_0^\infty K_0(x)\,x^{-s}\,dx = 0. \tag{8}$$

В этих интегралах можно переставить порядок интегрирования по x и по $y_1, \ldots, y_k$, так как подинтегральные выражения, при надлежащем выборе α и $b > 1$, равномерно ограничены и равномерно стремятся к нулю при стремлении $x, y_1, \ldots, y_k$ к бесконечности, так как

$$|u^*(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-s}\,\xi(s)\,ds\right| < \frac{A}{2\pi}x^{-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{|\alpha+iy|^b}.$$

Равенство (8) теперь перепишется в виде

$$\int_0^\infty x^{-s}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty K_k(xy_1\ldots y_k)\,u^*(y_1)\ldots u^*(y_k)\,dy_1\ldots dy_k - K_0(x)\right)dx = 0.$$

Применяя теперь формулу Меллина, мы получаем:

$$\mathfrak{N}(x;\ u) - K_0(x) = 0$$

для всех значений x, т. е. получаем уравнение (4). Таким образом взятые нами $u^*(x)$ являются решениями уравнения (4), чем доказывается, что $u(x) = u^*(x)$. Их число очевидно равно n (среди которых могут быть и одинаковые).

Примеры. Уравнение

$$K_0(x) = \int_0^\infty K_1(xy)\,u(y)\,dy + \int_0^\infty\int_0^\infty K_2(xy_1y_2)\,u(y_1)\,u(y_2)\,dy_1dy_2$$

при ограничениях на K_0, K_1 и K_2, налагаемых теоремой 1, имеет два решения, представимых в виде:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-s}\,\frac{1}{[K_2]}\left(-[K_1] \pm ([K_1]^2 - 4[K_0][K_2])^{\frac{1}{2}}\right)ds.$$

Уравнение

$$K_0(x) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty K(xy_1\ldots y_k)\,u(y_1)\ldots u(y_k)\,dy_1\ldots dy_k$$

имеет k различных решений, даваемых формулой

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-s}\left(\frac{[K_0]}{[K]}\right)^{\frac{1}{k}} ds.$$

Теорема 2. *Интегральное уравнение*

$$u(x)=\mathfrak{N}(x;\ u)+K_0(x) \tag{9}$$

при условиях, что все кусочно-гладкие K_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\left|[K_n]^{-n}\left\{K_n\right\}^{-1}\right|<\frac{cA^{n^2}}{|s^b|^{n^2}}, \qquad \left\{K_k\right\}\equiv\int\limits_0^\infty x^{s-1}K_k(x)\,dx,$$

$$\left|\frac{\left\{K_k\right\}[K_{l_0}]^{\alpha_0}[K_{l_1}]^{\alpha_1}\ldots[K_{l_k}]^{\alpha_k}}{[K_n]^n\left\{K_n\right\}}\right|<\frac{cA^{n^2}}{|s^b|^{n^2}}, \tag{10}$$

причем

$$0\leqslant l_i\leqslant n;\quad \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=k;\quad 0\leqslant\alpha_i\leqslant n-1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

$$c=\frac{1}{2^n(n+1)^n},$$

имеет не более n^2 *ограниченных решений, которые выражаются формулой:*

$$u_r(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} x^{-s}\,\xi_r(s)\,ds \qquad (r\leqslant n^2), \tag{12}$$

где $\xi_r(s)$ — *корни системы уравнений:*

$$\xi=\sum_{k=0}^{n}[K_k]\,\eta^k;\quad \eta=\sum_{k=0}^{n}\left\{K_k\right\}\xi^k. \tag{13}$$

Доказательство. Умножая (9) на $x^{-s}dx$ и интегрируя в $(0, \infty)$, получаем:

$$[u]=\int\limits_0^\infty x^{-s}\,\mathfrak{N}(x;\ u)\,dx+[K_0]. \tag{14}$$

Как и выше, это уравнение приводится к

$$[u]=\sum_{k=1}^{n}[K_k]\left\{u\right\}^k+[K_0]; \tag{15}$$

законность этого перехода ниже доказывается.

Заменяя в (15) s на $1-s$, получаем:

$$\left\{u\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{K_k\right\}[u]^k+\left\{K_0\right\}. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) представляют из себя систему (13) с неизвестными $\xi(s)=\left\{u\right\}$ и $\eta(s)=[u]$. Определяя $\xi(s)$ из этой системы, которую легко привести к одному уравнению, вставляя правую часть (15) вместо $[u]$ в уравнение (16):

$$\xi=\sum_{k=1}^{n}\{K_k\}\left(\sum_{l=1}^{n}[K_l]\xi^l+[K_0]\right)^k+\{K_0\}, \tag{17}$$

мы сразу же получаем $u(x)$ применением формулы Меллина к $\xi(s)=$ $=\int\limits_0^\infty x^{s-1}u(x)\,dx$ в виде (12). Так как коэффициент при ξ^k $(k=0, 1, \ldots$ $\ldots, n^2-1)$ в (17) представляет из себя сумму членов вида:

$$\{K_k\}[K_{l_0}]^{\alpha_0}[K_{l_1}]^{\alpha_1}\ldots[K_{l_k}]^{\alpha_k},$$

где $0\leqslant l_i\leqslant n$; $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=k$; $0\leqslant\alpha_i\leqslant n-1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, число которых $<(n+1)^n$, то к корням (17) можно применить лемму, воспользовавшись условиями (10) и (11) теоремы, что нам даст:

$$|\xi(s)|<\frac{A}{|s^b|}.$$

Получив это, мы при надлежащем выборе $\alpha>0$ и $b>1$ вправе делать переход от (14) к (15). Отсюда сразу же получается существование интегралов (12). Так как система уравнений (15) и (16) имеет не более n^2 решений, то и (9) при условиях (10) и (11) имеет не более n^2 решений. Выражение (12) будет тогда решением уравнения (9), когда $\xi(s)$ будет корнем системы (12).

Пример. Уравнение

$$u(x)=\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty K(xy_1\ldots y_n)\,u(y_1)\ldots u(y_n)\,dy_1\ldots dy_n$$

имеет n^2-1 отличных от нуля решений, даваемых формулой

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}x^{-s}\left(\frac{1}{[K]^n\{K\}}\right)^{\frac{1}{n^2-1}}ds,$$

когда

$$\left|[K]^{-n}\{K\}^{-1}\right|<\frac{A}{|s^b|^{n^2}},\ \text{где } A>0,\ A=\text{const},\ b>1.$$

Замечание. Непосредственно видно, что уравнения:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int K_k(x+y_1+\ldots y_k)\,u(y_1)\ldots u(y_k)\,dy_1\ldots dy_k\equiv\mathfrak{N}(x;\,u)$$

и

$$u(x)=\mathfrak{N}(x;\,u)+f(x)$$

приводятся к алгебраическим уравнениям с помощью ядер $e^{i\xi x}$ и $e^{-i\xi x}$ конечно при условиях, аналогичных (5) и (10) доказанных теорем.

Развитый метод легко обобщить на более общий вид ядер, например на ядра $K_k(\varepsilon_0x+\varepsilon_1y_1+\ldots+\varepsilon_ky_k)$ или $K_k(x^{\varepsilon_0}y_1^{\varepsilon_1}\ldots y_k^{\varepsilon_k})$, где ε_0, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ будут либо $+1$, либо -1.

Институт математики и механики.
Ленинградский государственный
университет.

Поступило
21 II 1938