Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII. № 4—5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

О ТАБЛИЦАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НАИМЕНЬШЕГО ОБЪЕМА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XII 1937)

В настоящей заметке вводится ряд характеристик таблиц, позволяющих конструировать таблицы минимального объема.

Слитной суммой чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ назовем число, образованное путем приписки этих чисел друг к другу, и обозначим $\boxed{a_1 a_2 \,\ldots\, a_k}$.

Слитной табулой k-го порядка от $f(x)$ в (a, b) назовем таблицу

$$\begin{array}{l} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1m_1} \\ A_{11}\, A_{12} \ldots A_{1m_1} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2m_2} \\ A_{21}\, A_{22} \ldots A_{2m_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}\ a_{k2} \ldots a_{km_k} \\ A_{k1}\, A_{k2} \ldots A_{km_k} \end{array} \tag{1}$$

обладающую тем свойством, что для всякого $a \leqslant x \leqslant b$ можно выбрать из нее k элементов $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_k j_k}$ таких, что $x = \boxed{a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \,\ldots\, a_{i_k j_k}}$ и $f(x) = \boxed{A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \ldots A_{i_k j_k}}$, если нельзя понизить ее порядок без увеличения количества элементов.

Табула одномерна, если для каждого значения $a \leqslant x \leqslant b$, $i_1 = i_2 = \ldots = i_k$. Перестановкой элементов внутри строк можно очевидно одномерную табулу представить в виде:

$$\begin{array}{l|l|l|l} a_{i11}\ a_{i12} \ldots a_{i1m_{i1}} & a_{i21}\ a_{i22} \ldots a_{i2m_{i2}} & \ldots & a_{ik1}\ a_{ik2} \ldots a_{ikm_{ik}} \\ A_{i11}\, A_{i12} \ldots A_{i1m_{i1}} & A_{i21}\, A_{i22} \ldots A_{i2m_{i2}} & \ldots & A_{ik1}\, A_{ik2} \ldots A_{ikm_{ik}} \end{array}, \; i = 1, 2, \ldots, M.$$

$= 1, 2, \ldots, M.$

так, что всегда $x = \boxed{a_{i1p_1} a_{i2p_2} \,\ldots\, a_{ikp_k}}$.

Совокупность a_{ipl} $(i = 1, 2, \ldots M;\ l = 1, 2, \ldots m_{ip})$ образует p-ю секцию табулы (1). Таким образом табула k-го порядка содержит k секций.

Строка аргумента, содержащая «a», называется начальной, а содержащая «b» конечной.

Строки одной секции считаются равными, если элементы, из которых образуются значения аргумента, у них одни и те же. Оставим в каждой секции табулы (I) лишь разные строки и назовем полученную таким образом таблицу основанием табулы (I). Одномерная табула однородна, если все строки (за исключением, быть может, конечной) одной и той же секции ее основания содержат одинаковое количество элементов.

Впредь, говоря о табулах, будем иметь в виду одномерные и однородные табулы.

Объемом табулы k-го порядка называется выражение $M\sum_{i=1}^{k} m_i n_i$, где M—количество строк, m_i—количество элементов начальной строки i-й секции, а $n_i = 1 + E\lg A_i$, где A_i—наибольший из элементов i-й секции.

Степенью табулируемости данной табулы k-го порядка от $f(x)$ в интервале (a, b) будем называть отношение объема табулы первого порядка от $f(x)$ в (a, b) к объему данной табулы. Табула от $f(x)$ оптимальна в (a, b), если ее степень табулируемости не меньше степени табулируемости всякой другой табулы того же порядка от $f(x)$ в (a, b).

Мы будем говорить, что числа: $a_1 a_2 \ldots a_k$ слитно суммируются со сдвигом «c» в том случае, если «c» наибольшее из c_i, которое нужно при слитном суммировании этих чисел прибавлять к a_i до приписки к нему a_{i+1}. Табула со сдвигом «c»—это табула, в которой элементы, образующие значения функции, слитно суммируются со сдвигом «c» в $R \leqslant M - 1$ строках.

Условимся записывать числа в интервале $(0,\ 10^m - 1)$ *, дополняя их слева нулями до m знаков.

Для слитной оптимальной табулы k-го порядка со сдвигом 1 для ax в интервале $0, 10^m - 1$ $(10^{n-1} + 1 \leqslant a \leqslant 10^n - 1)$ имеют место следующие леммы.

Лемма 1. При $p \geqslant 2$ $E\lg A_{ipl} = E\lg A_{jpr} = E\log a_{qps}$, где A_{ipl}, A_{jpr}, a_{qps}—наибольшие соответственно среди элементов A_{ip1}, A_{ip2}, ...; A_{jp1}, A_{jp2}, ...; a_{qp1}, a_{qp2} ... $(q = 1, 2, \ldots M)$.

Лемма 2. Элементами первой секции любой строки табулы являются все числа интервала $(0, P)$, где P—число вида $10^{n_1} - 1$.

Лемма 3. Элементами строк основания (за исключением, быть может, конечной) s-й секции $(s \geqslant 2)$ являются все целые числа интервала $x_{is},\ x_{is} + E\frac{10^{n_s}}{a}$ $(i = 1, 2, \ldots M - 1)$, где $n_s = 1 + E\lg a_{isl}$ (a_{isl}—наибольшее из a_{is1}, a_{is2}, ...). x_{is}—элементы арифметической прогрессии: нуль, $1 + E\frac{10^{n_s}}{a}$, ... При $i = M$ (конечная строка) интервал имеет вид

$$(M-1)\left(1 + E\frac{10^{n_s}}{a}\right),\ 10^{n_s} - 1.$$

Леммы 1—3 дают возможность написать выражение для степени табулируемости k-го порядка со сдвигом 1 в таком виде

$$\frac{10^{n_1}\prod_{s=2}^{k}\left(1 + E\frac{10^{n_s}}{a}\right)(m+n)}{10^{n_1}(n+n_1) + \sum_{s=2}^{k}\left(1 + E\frac{10^{n_s}}{a}\right)n_s}. \tag{A}$$

* В дальнейшем употребляется десятичная система счисления, хотя формулируемые далее теоремы 1 и 2 сохраняют силу и для всех остальных, кроме двоичной.

Для существования слитной табулы k-го порядка очевидно необходимо и достаточно, чтобы $m \geqslant (k-1)n+1$.

Из предыдущего следует, что определение структуры оптимальной табулы сводится к такому разбиению $m \geqslant (k-1)\, n+1$ на k слагаемых: $n_1, n_2, \ldots, n_k$, при котором выражение (А) имеет максимальное значение. Из легко устанавливаемых при $1 \leqslant q \leqslant p$ и $10^{n-1}+1 \leqslant a \leqslant 10^n - 1$ соотношений:

$$\frac{1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}}{10^q\left(1+E\dfrac{10^{n+p-q}}{a}\right)} > \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{10^{p+1+q}(n+p+q+1)+\left(1+E\dfrac{10^{n+p-q}}{a}\right)(n+p-q)}{10^{p+1}(n+p+1)+\left(1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p)} > 5, \tag{2}$$

$$\frac{10^q\left(1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}\right)}{1+E\dfrac{10^{n+p+q}}{a}} \geqslant 1, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}10^{p+1-q}(n+p+1-q)+\left(1+E\frac{10^{n+p+q}}{a}\right)(n+p+q)- \\ -10^{p+1}(n+p+1)-\left(1+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p) \geqslant 1\end{gathered} \tag{4}$$

следует

$$\frac{\left(1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}\right)\left[10^{p+1+q}(n+p+1+q)+\left(1+E\dfrac{10^{n+p-q}}{a}\right)(n+p-q)\right]}{10^q\left(1+E\dfrac{10^{n+p-q}}{a}\right)\left[10^{p+1}(n+p+1)+\left(1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p)\right]} > 1, \tag{5}$$

$$\frac{10^q\left(1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}\right)\left[10^{p+1-q}(n+p+1-q)+\left(1+E\dfrac{10^{n+p+q}}{a}\right)(n+p+q)\right]}{\left(1+E\dfrac{10^{n+p+q}}{a}\right)\left[10^{p+1}(n+p+1)+\left(1+E\dfrac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p)\right]} > 1, \tag{6}$$

что в соединении с леммами 1—3 дает:

Теорема 1. При $m-n=2p+1$ начальная строка* для элементов, из которых образуются значения аргумента в оптимальной слитной табуле второго порядка со сдвигом 1 для ax (a есть n-значное число; $1 \leqslant x \leqslant 10^m - 1$), имеет вид:

$$\begin{array}{|c|c|} \text{1-я секция} & \text{2-я секция} \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 10^{p+1}-1 & 0 \leqslant x_2 \leqslant E\dfrac{10^{n+p}}{a} \end{array}.$$

В соединении с соотношениями (1), (3) при $1 \leqslant q \leqslant p-1$:

$$\begin{gathered}10^{p-q}(n+p-q)+\left(1+E\frac{10^{n+p+q}}{a}\right)(n+p+q)- \\ -\left(1+10^p+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p) > 0,\end{gathered} \tag{7}$$

и при $2 \leqslant q \leqslant p$:

---

* Поскольку речь идет об однородной табуле, то она определяется структурой начальной строки.

$$\frac{10^{p+q}(n+p+q)+\left(1+E\frac{10^{n+p-q}}{a}\right)(n+p-q)}{\left(1+10^p+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p)}>5, \tag{8}$$

откуда при $1 \leqslant q \leqslant p-1$

$$\frac{10^q\left(1+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)\left[10^{p-q}(n+p-q)+\left(1+E\frac{10^{n+p+q}}{a}\right)(n+p+q)\right]}{\left(1+E\frac{10^{n+p+q}}{a}\right)\left(1+10^p+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p)}>1 \tag{9}$$

и при $2 \leqslant q \leqslant p$

$$\frac{\left(1+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)\left[10^{p+q}(n+p+q)+\left(1+E\frac{10^{n+p-q}}{a}\right)(n+p-q)\right]}{10^q\left(1+E\frac{10^{n+p-q}}{a}\right)\left(1+10^p+E\frac{10^{n+p}}{a}\right)(n+p)}>1 \tag{10}$$

леммы 1—3 дают

Теорема 2. При $m-n=2p$ начальная строка для элементов, из которых образуются значения аргумента в оптимальной слитной табуле второго порядка со сдвигом 1 для ax может иметь вид:
либо

1-я секция	2-я секция
$0 \leqslant x_1 \leqslant 10^p-1$	$0 \leqslant x_2 \leqslant E\frac{10^{n+p}}{a}$

либо

$0 \leqslant x_1 \leqslant 10^{p+1}-1$	$0 \leqslant x_2 \leqslant E\frac{10^{n+p-1}}{a}$

.

Совокупность табул для ax $(1 \leqslant x \leqslant 10^m-1)$ при всех $10^{n-1}+1 \leqslant a \leqslant 10^n-1$ очевидно даст табулу для $z=xy$ $(1 \leqslant x \leqslant 10^m-1;\ 1 \leqslant y \leqslant 10^n-1)$. Если потребовать однородность для этой последней, то ее структура определится начальной строкой табулы для $(10^n-1)x$.

Так как когда $a=10^n-1$ (10) имеет место и при $q=1$, то можно, сохраняя оптимальность и для $m-n=2p+1$ и для $m-n=2p$ перестановкой строк в табуле $z=xy$ придать ее начальной странице (т. е. совокупности начальных строк табул для разных y) вид:

y \ x	$10^{m-n-p-1} \leqslant x_1 \leqslant 10^{m-n-p}-1$	$0 \leqslant x_2 \leqslant E\frac{10^{n+p}}{a}$
$10^{n-1}+1$		
$10^{n-1}+2$ *		
.		
.		
.		
10^n-1		

наиболее естественный для табул произведений.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
23 XII 1937.

* Так как строка аргумента в 1-й и 2-й секциях одна и та же для всех y, она дается лишь один раз вначале.