Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

Б. Д. КАМИНСКИЙ

КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩИЕ ПОСТОЯННУЮ НОРМАЛЬНУЮ КРИВИЗНУ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 XII 1937)

Будем считать, что рассматриваемые поверхности гладкие и что встречающиеся в дальнейшем функции конечны и непрерывны, так же как и все их производные до третьего порядка включительно.

Обобщим понятие асимптотической линии, для которой нормальная кривизна во всех точках постоянна и равна нулю. Именно, будем рассматривать кривые на поверхности, во всех точках которой нормальная кривизна постоянна и равна $\frac{1}{R}$. Назовем такие кривые кривыми с постоянной нормальной кривизной. Дифференциальным уравнением таких кривых будет:

$$(RL-E)\,du^2+2(RM-F)\,du\,dv+(RN-G)\,dv^2=0, \tag{1}$$

где E, F, G — гауссовы коэффициенты первой квадратичной формы, а L, M, N — второй квадратичной формы. Следовательно через данную точку поверхности проходят две кривые с заданной постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$. И только в том случае, когда поверхность есть огибающая семейства сфер постоянного радиуса, центры которых находятся на некоторой кривой, через данную точку проходит только одна линия с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$. Для поверхностей вращения вопрос о нахождении кривых с постоянной нормальной кривизной приводится к квадратурам. Особенно легко получаются уравнения таких кривых для прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса.

Угол Θ между двумя линиями, имеющими одну и ту же нормальную кривизну $\frac{1}{R}$, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\sqrt{-(R^2K-2RH+1)}}{RH-1}. \tag{2}$$

Здесь K — гауссова кривизна, а H — средняя кривизна в рассматриваемой точке.

Если кривые с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$ принять за параметрические, то гауссовы коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$\frac{L}{E}=\frac{N}{G}=\frac{1}{R},\quad \frac{M}{F}\neq\frac{1}{R}. \tag{3}$$

При этом обыкновенное кручение u-линий и v-линий можно вычислить соответственно по формулам:

$$\frac{1}{\tau_{(u)}}=\frac{\omega\cdot\left[\frac{G}{R}\left(\left\{{12 \atop 1}\right\}\cdot\left\{{12 \atop 1}\right\}+\left\{{22 \atop 1}\right\}_v+\frac{G^2(F-RM)}{R^2\omega^2}\right)-\left\{{22 \atop 1}\right\}^2 M-\frac{G_v}{R}\left\{{22 \atop 1}\right\}\right]}{\omega^2\left\{{22 \atop 1}\right\}^2+\frac{G^3}{R^2}},$$

$$\frac{1}{\tau_{(v)}}=\frac{\omega\cdot\left[\left\{{11 \atop 2}\right\}^2 M+\frac{E_u}{R}\left\{{11 \atop 2}\right\}-\frac{E}{R}\left(\left\{{11 \atop 2}\right\}\cdot\left\{{12 \atop 2}\right\}+\frac{E^2(F-RM)}{R^2\omega^2}+\left\{{11 \atop 2}\right\}_u\right)\right]}{\omega^2\left\{{11 \atop 2}\right\}^2+\frac{E^3}{R^2}}.$$

Здесь $\omega=\sqrt{EG-F^2}$, а $\left\{{12 \atop 1}\right\}$ и т.д.—известные трехиндексовые символы Христофеля. Далее вычисляется геодезическое кручение $a_{(u)}$ u-линий и геодезическое кручение $a_{(v)}$ v-линий. Оказывается, что

$$a_{(u)}=\frac{F-RM}{\omega},\quad a_{(v)}=-\frac{F-RM}{\omega}. \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что кривые с постоянной нормальной кривизной в точке пересечения имеют геодезические кручения, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку. Предложение это было известно ранее для ортогональных кривых.

Далее доказывается обратное предложение, что геодезические кручения двух пересекающихся кривых в их точке пересечения равны по абсолютному значению и обратны по знаку, если эти кривые ортогональны или имеют в этой точке одинаковую нормальную кривизну.

Так как для асимптотических линий геодезическое кручение совпадает с их обыкновенным кручением, то из полученных результатов и формул (4) вытекает теорема Бельтрами-Эннепера об асимптотических линиях.

Далее, приняв длину дуги кривой с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$ за параметр, вычисляется проекция вектора, касательного к сферическому отображению такой кривой, на касательный вектор последней. Оказывается, что эта проекция для всех точек кривой постоянна и равна $-\frac{1}{R}$. Отсюда как следствие получается ортогональность асимптотической линии к своему сферическому отображению.

Пусть $\overline{\xi}$ обозначает нормаль к поверхности $\overline{x}=\overline{x}(u, v)$ в данной точке, причем эта поверхность отнесена к кривым с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$. Тогда можно получить формулы:

$$\left.\begin{aligned}\overline{x}_u&=-\frac{\lambda^2 R}{\lambda^2+R^2}\,\overline{\xi}_u+\frac{\lambda R^2}{\lambda^2+R^2}\,[\overline{\xi}\times\overline{\xi}_u],\\ \overline{x}_v&=-\frac{\lambda^2 R}{\lambda^2+R^2}\,\overline{\xi}_v-\frac{\lambda R^2}{\lambda^2+R^2}\,[\overline{\xi}\times\overline{\xi}_v].\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Вектор $\overline{\xi}$ и функция $\lambda(u, v)$, само собой разумеется, должны удовлетворять условию совместности уравнений (5).

Из формул (5) получаются при $\frac{1}{R}=0$ формулы Лельевра для асимптотических линий.

При доказательстве последних формул приходится иметь дело с вектором

$$\overline{y}=\overline{x}+R\,\overline{\xi},$$

т. е. с векториальным уравнением поверхности, параллельной данной поверхности и отстоящей от нее на расстоянии R. Оказывается, что кривым с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$ поверхности $\bar{x}$ соответствуют на поверхности $\bar{y}$ тоже кривые с постоянной нормальной кривизной, но равной $-\frac{1}{R}$, причем последние образуют между собой угол, равный углу между исходными кривыми поверхности $\bar{x}$. Далее, линиям кривизны поверхности $\bar{x}$ соответствуют линии же кривизны поверхности $\bar{y}$, при этом уравнения тех и других

$$Edu^2 - Gdv^2 = 0.$$

Потом получается предложение, что кривые с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$, взятые с поверхности $\bar{x}$, о р т о г о н а л ь н ы соответствующим им на параллельной поверхности $\bar{y}$ кривым с постоянной нормальной кривизной $-\frac{1}{R}$.

В последней части рассматриваются поверхности, имеющие ортогональную сеть кривых с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$. Такие поверхности имеют постоянную среднюю кривизну H, равную $\frac{1}{R}$. Гауссовы коэффициенты такой поверхности, отнесенной к упомянутым кривым, оказывается, имеют вид:

$$\text{I)}\ E = \lambda(u, v) f_1^2(u),\ G = \lambda(u, v) f_2^2(v), F = 0;$$

$$\text{II)}\ L = \frac{\lambda(u, v) f_1^2(u)}{R},\ M = f_1(u) f_2(v),\ N = \frac{\lambda(u, v) f_2^2(v)}{R}.$$

Здесь функции $\lambda(u, v), f_1(u)$ и $f_2(v)$ должны удовлетворять только формуле Гаусса, связывающей кривизну с гауссовыми коэффициентами первой квадратичной формы, причем $\lambda(u, v)$ есть радиус геодезической кривизны v-линий. Из выражений для E и G вытекает, что на поверхности с постоянной средней кривизной $H = \frac{1}{R}$ кривые с постоянной нормальной кривизной $\frac{1}{R}$ образуют и з о т е р м и ч е с к у ю с е т ь.

Если λ зависит только от одного переменного, например v, то поверхность представляет собой частный случай поверхностей Лиувиля. В этом случае

$$E = \lambda(v) f_1^2(u),\ F = 0, \qquad G = \frac{R^2 \lambda(v) \lambda'^2(v)}{C - 4R^2 \lambda(v) - 4\lambda^3(v)},$$

$$M = \frac{R f_1(u) \lambda'(v)}{\sqrt{C - 4R^2 \lambda(v) - 4\lambda^3(v)}},\ L = \frac{\lambda(v) f_1^2(u)}{R},$$

$$N = \frac{R \lambda(v) \lambda'(v)}{C - 4R^2 \lambda(v) - 4\lambda^3(v)},$$

где $f_1(u)$ и $\lambda(v)$ — уже произвольные функции.

Ленинградская лесотехническая академия.

Поступило 26 XII 1937.