Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. ШИН

ТЕОРЕМЫ КОЛЕБАНИЯ ГРАНИЧНЫХ ПРОБЛЕМ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ 4-го ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 I 1938)

Рассмотрим самосопряженную дифференциальную систему 4-го порядка

$$P\frac{d}{dx}y^{[3]}+Ry^{[2]}+(\psi-\lambda\tau)y^{[0]}=0,\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad -\infty<\lambda<\infty,\tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}a_{k\nu}y_{(a)}^{[4-\nu]}+\sum_{\nu=1}^{4}b_{k\nu}y_{(b)}^{[4-\nu]}=0,\quad k=1-4,\tag{2}$$

где

$$y^{[0]}=py,\quad y^{[1]}=q\frac{d}{dx}y^{[0]},\quad y^{[2]}=\rho\frac{d}{dx}y^{[1]}+\sigma y^{[0]},$$

$$y^{[3]}=q\frac{d}{dx}y^{[2]}+\varphi y^{[1]},\quad R=\frac{p\sigma}{\rho};$$

функции $p(x)>0$, $q(x)>0$, $\rho(x)>0$, $\sigma(x)\leqslant 0$, $\varphi(x)\leqslant 0$, $\psi(x)$, $\tau(x)>0$ действительны и непрерывны в конечном замкнутом интервале (a, b). Граничные условия (2) могут быть написаны или в виде:

$$y_{(a)}^{[k]}=\sum_{j=0}^{3}h_{kj}\,y_{(b)}^{[3-j]},\quad y_{(b)}^{[k]}=\sum_{j=0}^{3}(-1)^{k+j+1}h_{jk}\,y_{(a)}^{[3-j]},\quad k=0-3,$$

или по крайней мере два из них приводятся к виду:

$$\sum_{j=0}^{3}(-1)^{j}a_j y_{(a)}^{[j]}=0,\quad \sum_{j=0}^{3}b_j y_{(b)}^{[j]}=0.$$

Согласно с проф. С. А. Янчевским [1] граничные условия (2) мы назовем регулярными, если постоянные h_{kj} или $a_j(b_j)$ имеют один и тот же знак. Легко показать, что если в некоторой точке x_0, $a\leqslant x_0<b$, имеют место неравенства $y_{(x_0)}^{[k]}\geqslant 0\,(\leqslant 0)$, $k=0-3$, то для всех точек интервала $x_0<x\leqslant b$ имеют место неравенства $y_{(x)}^{[k]}>0\,(<0)$, $k=0-3$; если же в некоторой точке x_0, $a<x_0\leqslant b$, имеют место неравенства $(-1)^k y_{(x_0)}^{[k]}\geqslant 0\,(\leqslant 0)$, $k=0-3$, то для всех точек интервала $a\leqslant x<x_0$ имеют место неравенства $(-1)^k y_{(x)}^{[k]}>0\,(<0)$, $k=0-3$. Из регулярности граничных условий (2) следует, что всякое характеристическое значение λ, удовлетворяющее условию $\psi(x)-\lambda\tau(x)<0$, $a\leqslant x\leqslant b$, имеет индекс 1 или 2, а им соответствующие фундаментальные функции имеют только простые нули внутри интервала (a, b).

Число m нерегулярных характеристических значений конечно, в частности, если $\psi(x)=0$, то $m \leqslant 7$.

В случае, когда граничные условия (2) вырождаются в условия типа Штурма, т. е. два из них относятся к одному концу интервала, а два остальных — к другому концу интервала, все регулярные характеристические значения имеют индекс 1 и они располагаются следующим образом

$$\lambda_{m+1} < \lambda_{m+2} < \lambda_{m+3} < \ldots$$

В общем случае они располагаются или в виде

$$\lambda_{m+1} \leqslant \lambda_{m+2} < \lambda_{m+3} \leqslant \lambda_{m+4} < \ldots ,$$

или в виде

$$\lambda_{m+1} < \lambda_{m+2} \leqslant \lambda_{m+3} < \lambda_{m+4} \leqslant \ldots$$

В случае Штурма фундаментальная функция $y_n(x, \lambda_n)$, $n \geqslant m+1$, имеет или $n-2$, или $n-1$, или n нулей в интервале (a, b), а в общем случае фундаментальные функции $y_{n-1}(x, \lambda_{n-1})$, $y_n(x, \lambda_n)$, $y_n(x, \lambda_{n+1})$, $n-1 \geqslant m+1$, независимо друг от друга, имеют или $n-3$, или $n-2$, или $n-1$, или n, или $n+1$ нулей в интервале (a, b).

При рассмотрении отдельных канонических случаев граничных условий все теоремы колебания уточняются в таком же порядке, как это было установлено проф. С. А. Янчевским для дифференциальной системы

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\rho \frac{d^2 y}{dx^2}\right) + (\psi - \lambda\tau)\, y = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{4} a_{k\nu} y_{(a)}^{(4-\nu)} + \sum_{\nu=1}^{4} b_{k\nu} y_{(b)}^{(4-\nu)} = 0, \ k=1-4.$$

Научно-исследовательский институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
9 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Янчевский, Annals of Mathematics, **29**, 521—542 (1928), **31**, 663—680 (1930).