Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

С. Д. РОССИНСКИЙ

ОБ ИЗГИБАНИИ КОНГРУЭНЦИИ С СОХРАНЕНИЕМ ЕЕ ГЛАВНЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 25 XII 1937)

§ 1. Рассмотрим некоторую поверхность S. С каждой ее касательной плоскостью свяжем неизменно соответствующий луч некоторой прямолинейной конгруэнции C. Когда S изгибается, то лучи конгруэнции, будучи неизменно связаны с ее касательными плоскостями, перемещаются в пространстве, образуя новую конгруэнцию, которая называется изгибанием первоначальной.

Если при этом изгибании конгруэнция сохраняет свои главные линейчатые поверхности, то такое изгибание называется изгибанием с сохранением главных линейчатых поверхностей.

Указанное изгибание для случая произвольного расположения луча конгруэнции относительно соответствующей касательной плоскости до сих пор еще не изучено.

Случай конгруэнции, лучи которой ортогональны соответствующим касательным плоскостям поверхности S, был рассмотрен мной ранее [1].

В настоящей заметке изучается тот случай, когда луч конгруэнции C лежит в соответствующей касательной плоскости изгибающейся поверхности S.

Случай произвольного изгибания S не приводит к интересным результатам; во всем дальнейшем рассматривается непрерывное изгибание поверхности S с сохранением сопряженной системы, т. е. изгибание S на главном основании.

§ 2. Допустим, что поверхность S обладает главным основанием изгибания и отнесем ее к этому основанию. Пусть $\bar{\rho}(u, v)$ есть вектор, определяющий поверхность S, а $\bar{n}(u, v)$—единичный вектор ее нормали. Пусть далее $E, F, G, D, D'=0, D''$ — коэффициенты форм $d\bar{\rho}^2$ и $-d\bar{\rho}d\bar{n}$, относящихся к поверхности S. Пусть наконец l — длина отрезка, отсекаемого касательными к линиям u и v на луче конгруэнции, а $\bar{\zeta}$ — единичный вектор луча конгруэнции. Тогда

$$\bar{\zeta}=\frac{1}{l}\left(\frac{\eta\bar{\rho}_v}{\sqrt{G}}-\frac{\xi\bar{\rho}_u}{\sqrt{E}}\right)=a\bar{\rho}_u+b\bar{\rho}_v,$$

где геометрический смысл величин ξ и η очевиден.

Исходную поверхность конгруэнции определим вектором:

$$\bar{\rho}_1=\bar{\rho}+\frac{\xi\bar{\rho}_u}{\sqrt{E}}=\bar{\rho}+c\bar{\rho}_u.$$

Квадратичные формы Куммера для конгруэнции C будут:

$$d\bar{\zeta}^2 = E_0 du^2 + 2F_0 du\, dv + G_0\, dv^2$$

и

$$d\bar{\zeta} d\bar{\zeta}_1 = e du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2.$$

Дифференциальное уравнение главных линейчатых поверхностей:

$$\begin{vmatrix} E_0\, du + F_0\, dv, & F_0\, du + G_0\, dv \\ 2e\, du + (f + f')\, dv, & (f + f')\, du + 2g\, dv \end{vmatrix} = 0$$

в силу уравнения Гаусса $DD'' = KH^2$ (K — кривизна S, $H^2 = EG - F^2$) может быть представлено в виде:

$$D^4 (\lambda\, du^2 + 2\mu\, du\, dv) + D^2 (\lambda_1 du^2 + 2\mu_1 du\, dv + \nu_1 dv^2) + \\ + 2\mu_2 du\, dv + \nu_2 dv^2 = 0,$$

где, положив $m = f + f'$, $n = F_0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = a(am - 2cn); \quad \mu_1 = gM - PQ - ab^2cK^2H^4; \\ &\mu = a(ag - cQ); \quad \nu_1 = 2gn - Qm; \\ &\lambda_1 = Mm - 2Pn; \quad \mu_2 = Pb^2K^2H^4; \quad \nu_2 = mb^2K^2H^4, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причем P, Q и M суть определенные функции от E, F, G, a и b и их производных первого порядка.

Поставленная задача приводит к трем уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\, du^2 + 2\mu\, du\, dv &= 0, \\ \lambda_1 du^2 + 2\mu_1 du\, dv + \nu_1 dv^2 &= 0, \\ 2\mu_2\, du\, dv + \nu_2\, dv^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

которые очевидно должны сводиться к одному.

Отбросив тривиальный случай совпадающих семейств главных линейчатых поверхностей, можно выделить пять следующих допущений относительно коэффициентов уравнений (2):

1) $\lambda = \mu = \lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = \mu_2 = \nu_2 = 0;$
2) $\lambda = \lambda_1 = \nu_1 = \nu_2 = 0;$
3) $\lambda = \mu = \lambda_1 = 0; \quad \mu_1 : \mu_2 = \nu_1 : \nu_2;$
4) $\nu_2 = \mu_2 = \nu_1 = 0; \quad \lambda : \lambda_1 = \mu : \mu_1;$
5) $\lambda = \mu = \mu_2 = \nu_2 = 0.$

§ 3. Отметим сначала два частных случая.

I. Пусть $a = -\dfrac{\xi}{l\sqrt{E}} = 0$. В этом случае можно считать $l = \eta = \infty$, $\xi \neq 0$. Случай $\xi = 0$ войдет в него как частный. При ξ, отличном от нуля, оказывается, что S может быть произвольной поверхностью, обладающей главным основанием изгибания (u, v). Если на касательной к линии $v = \text{const}$ главного основания отложить отрезок ξ, определяемый уравнением:

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\xi_v - \xi \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{F}{E}\right) - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\sqrt{E} + \xi_u - \xi \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{F}{E}\right) + \xi GK = 0, \quad (3)$$

и через его конец провести прямую, параллельную касательной к линии $u = \text{const}$ главного основания, то это и будет луч искомой конгруэнции.

Заметим, что если отрезки ξ_1, ξ_2 определяют собой искомые конгруэнции, то и отрезок $\xi = \frac{\xi_1 + p\xi_2}{1 + p}$, где $p = \text{const}$, дает решение.

Конгруэнция C может быть нормальной только при условии $\xi = 0$, а следовательно, как показывает уравнение (3), имеем $\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$. Итак, решением задачи служит здесь любая поверхность S, обладающая главным основанием с одним семейством геодезических линий ($u = \text{const}$). Лучи нормальной конгруэнции C суть касательные к этому семейству геодезических линий.

II. Случай $b = 0$ геометрически эквивалентен указанному случаю $\xi = 0$.

§ 4. Исследование отмеченных в § 2 пяти случаев обнаруживает, что представляет интерес только случай 2), так как все другие случаи сводятся к случаю 1), а этот последний, как случай изотропной конгруэнции, для поставленной задачи является банальным.

Что касается случая 2), то из равенств (1) видно, что в этом случае имеем только два условия, а именно $m = 0$, $n = 0$, которые вместе с тремя известными уравнениями на E, F, G ([2]) определяют отрезки ξ и η, отсекаемые лучом конгруэнции на касательных к линиям главного основания (u, v). Таким образом решением задачи является произвольная поверхность S, обладающая главным основанием изгибания.

Если потребовать, чтобы соответствующая конгруэнция C была конгруэнцией нормалей, то оказывается, что это возможно только в случаях $a = 0$, $b = 0$ или $K = 0$.

Мой метод оставляет в стороне случай луча, проходящего через точку касания и не совпадающего с касательной к линии главного основания. Этот случай еще ждет своего решения.

Научно-исследовательский институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
9 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Rossinski, C. R., **200**, 515—516 (1935) или мемуар в Annali di Matematica (IV), XIV, 349—358 (1935/36). [2] С. С. Бюшгенс, Матем. сб., **28**, 507—528 (1912); С. П. Фиников, ibid., 529—543; B. Gambier, Mémorial de Sci. Math., XXXI, 33 (1928).