Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ

О РАЗРЕШИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 XII 1937)

В настоящей заметке я имею в виду сообщить ряд результатов, касающихся вопросов разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, а также представимости функций равномерно сходящимися рядами гармонических полиномов. При этом изложение будет вестись для случая пространства трех измерений, однако результаты непосредственно могут быть перенесены и на большее число измерений.

§ 1. Разрешимость задачи Дирихле. Пусть D—произвольная область, $\sum$—ее граница, $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$—последовательность областей, ограниченных аналитическими поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, таких, что $\bar{d}_n = d_n + S_n$ содержится в D и области d_n сходятся к D так, что каждое замкнутое множество, принадлежащее D, начиная с некоторого n, принадлежит d_n. Пусть $f(P)$—непрерывная на $\sum$ функция, $\varphi(P)$—непрерывная во всем пространстве функция, совпадающая с $f(P)$ на $\sum$. Следуя Wiener'у (1), мы рассмотрим последовательность функций:

$$u_{1,\varphi}(P),\ u_{2,\varphi}(P),\ \ldots,\ u_{n,\varphi}(P),\ \ldots,$$

$u_{n,\varphi}$ определена в d_n и совпадает с $\varphi(P)$ на S_n. Пусть $u_f(P)$—предел $u_{n,\varphi}(P)$ в D. Функция $u_f(P)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле с граничными данными $f(P)$.

Мы скажем, что задача Дирихле с данными $f(P)$ разрешима в граничной точке Q, если $\lim\limits_{P \to Q} u_f(P) = f(Q)$.

Пусть Q—произвольная точка $\sum$, тогда имеет место

Теорема 1. *Если $P \to Q$, то или все предельные значения $u_f(P)$ не больше $f(Q)$ или все предельные значения $u_f(P)$ не меньше $f(Q)$.*

Пусть $\omega(Q, f)$—колебание* функции $u_f(P)$ в точке Q. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Колебание $\omega(Q, f)$ есть линейный функционал от $f(P)$.* Этот функционал может быть выражен в виде

$$\omega(Q, f) = \int\limits_{\Sigma} [f(P) - f(Q)]\, d\omega_Q,$$

* При этом мы будем считать $\omega(Q, f)$ положительным, если предельные значения $U_\varphi(P)$ не меньше $f(Q)$, а в противном случае—отрицательным.

где $\omega_Q(e)$—положительная непрерывная аддитивная функция множества e, $e \subset \sum$. Из указанных результатов вытекает, что существует счетное множество иррегулярных точек $\sum, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, таких, что из разрешимости проблемы Дирихле для данных $f(P)$ в точках этого множества следует разрешимость проблемы Дирихле для данных $f(P)$ в области D. Условия разрешимости в D могут быть представлены в виде:

$$\int_{\Sigma} [f(P) - f(Q_n)]\, d\omega_{Q_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

§ 2. Устойчивость задачи Дирихле. Пусть D—односвязная область, граница $\sum$ которой является границей области D_∞, содержащей бесконечно удаленную точку. Рассмотрим последовательность односвязных областей $D_1, D_2, \ldots D_n, \ldots$, ограниченных аналитическими поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ и таких, что $D_n \supset \overline{D} = D + \sum$, D_n сходятся к D, т. е. каждое замкнутое множество, принадлежащее D_∞, начиная с некоторого n, лежит вне D_n. Пусть $f(P)$ и $\varphi(P)$—функции, определенные в § 1. Рассмотрим последовательность функций:

$$U_{1,\varphi}(P), U_{2,\varphi}(P), \ldots, U_{n,\varphi}(P), \ldots,$$

$U_{n,\varphi}(P)$ гармонична в D_n и совпадает с $\varphi(P)$ на S_n. Функции $U_{n,\varphi}$ сходятся в $\overline{D}$, и сходимость равномерна внутри D. Пусть $U_f(P)$—предельная функция. Мы скажем, что проблема Дирихле с данными $f(P)$ устойчива внутри области D, если в точках D—$U_f(P) = u_f(P)$. Проблема Дирихле устойчива в замкнутой области $\overline{D}$, если на $\sum$ функции $U_{n,\varphi}(P)$ сходятся равномерно к $f(P)$. Проблема Дирихле с данными $f(P)$ устойчива в граничной точке Q, если $U_f(Q) = f(Q)$. Если это равенство выполняется для любой непрерывной функции $f(P)$, то точка Q называется точкой устойчивости*. Отметим здесь же, что из устойчивости задачи Дирихле в замкнутой области следует ее разрешимость.

Устойчивость в граничной точке. Отметим прежде всего следующее свойство функции $U_f(P)$.

Теорема 3. *Пусть Q—граничная точка D. Все предельные значения функции $U_f(P)$ при $P \to Q$ заключены между $U_f(Q)$ и $f(Q)$.*

Обозначая через $\Omega(Q, f)$ колебание функции $U_f(Q)$ в точке Q, имеем:

Теорема 4. *Колебание $\Omega(Q, f)$ есть линейный функционал от $f(P)$.* Этот функционал может быть представлен в виде:

$$\Omega(Q, f) = \int_{\Sigma} [f(P) - f(Q)]\, d\Omega_Q,$$

где $\Omega_Q(e)$—положительная непрерывная аддитивная функция множества e, $e \subset \sum$.

Каждая точка устойчивости $\sum$ есть в то же время регулярная точка. Для точек устойчивости имеем следующий критерий.

Теорема 5. *Пусть Q—граничная точка D, λ_n—внутренняя емкость* (2) *множества точек D_∞, расстояние которых от Q заключено между 2^{1-n} и 2^{-n}. Точка Q будет точкой устойчивости или точкой*

---

* Эти определения для областей с жордановой границей были даны и изучены автором и М. А. Лаврентьевым (2), однако примененный ранее метод существенно опирался на то, что граница области жорданова.

неустойчивости в зависимости от того, расходится или сходится ряд $\sum 2^n \lambda_n$.

Устойчивость в области. Следующие теоремы связывают устойчивость задачи Дирихле в области с устойчивостью в граничных точках.

Теорема 6. *Для того, чтобы проблема Дирихле, с данными* $f(P)$, *была устойчива внутри области, необходимо и достаточно, чтобы она была устойчива во всех точках границы за исключением множества гармонической меры нуль.*

Теорема 7. *Если проблема Дирихле разрешима в* D *и устойчива внутри* D, *то она устойчива в замкнутой области* $\overline{D}$. *Если проблема Дирихле устойчива внутри* D *и разрешима в граничной точке* Q, *то она устойчива в* Q.

Теорема 8. *Если проблема Дирихле устойчива в каждой точке* $\sum$, *то она устойчива в замкнутой области* $\overline{D}$.

Теорема 9. *Существует счетное множество точек* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ *таких, что для устойчивости задачи Дирихле, с данными* $f(P)$, *в области* $\overline{D}$ *необходимо и достаточно выполнение равенств:*

$$\int_{\Sigma} [f(P) - f(Q_n)]\, d\Omega_{Q_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Области устойчивости. Теперь мы дадим ряд предложений, характеризующих классы областей, в которых устойчива всякая проблема Дирихле.

Теорема 10. *Для того, чтобы всякая проблема Дирихле была устойчива в замкнутой области* $\overline{D}$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая точка* $\sum$ *была бы точкой устойчивости.*

Теорема 11. *Для того, чтобы всякая проблема Дирихле была устойчива внутри* D, *необходимо и достаточно, чтобы множество точек неустойчивости имело гармоническую меру нуль.*

Из теоремы 7 следует, что в областях такого типа каждая регулярная точка есть точка устойчивости.

Теорема 12. *Для того, чтобы проблема Дирихле была устойчива в* $\overline{D}$ *при всех граничных данных, при которых она разрешима, необходимо и достаточно, чтобы множество регулярных точек* $\sum$ *совпадало с множеством точек устойчивости.*

Мы отметим здесь, что в случае жордановой границы $\sum$ теоремы 5, 7, 10 и 11 были получены ранее автором совместно с М. А. Лаврентьевым (2). В этой же работе был дан пример области, в которой разрешимая проблема Дирихле может быть неустойчива внутри.

§ 3. Представимость функций рядами гармонических полиномов. С вопросом об устойчивости задачи Дирихле тесно связан вопрос о представимости функций рядами гармонических полиномов на континууме. Пусть F—континуум, $f(P)$—функция, заданная на F и представимая на F равномерно сходящимся рядом полиномов. Тогда $f(P)$ должна быть непрерывна на F и гармонична во внутренних точках F. Отметим следующее предложение.

Теорема 13. *Пусть* F*—континуум,* P*—граничная точка* F, $\lambda_n(P)$*—внутренняя емкость множества точек* O_n, *дополнения к* F, *расстояние которых от* F *заключено между* 2^{1-n} *и* 2^{-n}, $\gamma_n(P)$*—емкость* O_n. *Для того чтобы всякая функция* $f(P)$, *непрерывная на* F *и гармоническая во внутренних точках* F, *была бы представима равномерно сходящимся* *на F рядом гармонических полиномов, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *континуум F не разбивал пространство,* 2) *ряды* $\sum 2^n \gamma_n(P)$, $\sum 2^n \lambda_n(P)$ *одновременно сходились или расходились в каждой граничной точке F.*

Отметим еще следующее предложение.

Теорема 14. *Существует нигде не плотный континуум F, не разбивающий пространство и обладающий следующим свойством:*

Если две функции U и V, представимые на F равномерно сходящимися рядами гармонических полиномов, совпадают на некоторой порции F, то они совпадают на всем континууме F.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
2 I 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Kellog, Potential Theory. [2] M. Keldych et M. Lavrentieff, C. R., **204**, 1788. Подробное изложение результатов этой работы см. «ИМЕН», Серия математическая, № 4 (1937).