Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. С. ГИЛЬМАН

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком Б. Г. Галеркиным 28 I 1938)

Применение конформного отображения к решению плоской задачи теории упругости рассматривалось многими авторами (Love, Мусхелишвили и др.). Ими указаны различные методы решения плоской задачи при помощи конформного отображения. Мы здесь рассмотрим иной метод применения конформного отображения, основанный на использовании траекторий напряжений. При этом мы будем опираться на результаты работы Neményi (1), в которой он показал, что любая ортогональная сеть, состоящая из двух сопряженных семейств изотермических линий, может рассматриваться как сеть траекторий напряжений для некоторого плоского напряженного состояния. Одновременно Neményi дал весьма простой способ определения главных напряжений, соответствующих данной изотермической сети траекторий напряжений. Эти результаты дают возможность с большой простотой получить решение для ряда случаев плоской задачи. В самом деле, имея решение для некоторого напряженного состояния, для которого траектории напряжений образуют изотермическую сеть, мы можем, отображая данную область на некоторую другую, получить новую, также изотермическую сеть траекторий напряжений, которая нам даст решение для аналогичного напряженного состояния в области нового вида. При этом края, свободные от касательных напряжений, остаются такими же и в новой области (ибо траектории напряжений переходят к траектории напряжений). Края, свободные от нормальных напряжений, как мы увидим, не всегда остаются такими же и в новой области. Тем не менее указанным путем могут быть получены достаточно интересные решения.

В качестве примера возьмем полуплоскость, нагруженную сосредоточенной силой. В этом случае, как известно, траектории напряжений образуют изотермическую сеть радиусов и концентрических окружностей. Принимаем эту полуплоскость за полуплоскость переменной $u = X + iY$.

Полагая далее $u = \sin\frac{\pi z}{2l}$, мы отобразим нашу полуплоскость на бесконечно длинную полосу шириной $2l$ в плоскости переменной $z = x + iy$.

Семейство окружности перейдет, как легко показать, в семейство кривых:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2\frac{\pi x}{2l} + \operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{2l}\right) = C,$$

семейство радиусов — в семейство кривых:

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi y}{2l}\right)=C'.$$

Рассматривая полученную изотермическую сеть как сеть траекторий напряжений, определим значения соответствующих главных напряжений σ_1 и σ_2.

Для их нахождения воспользуемся формулами Neményi. Принимаем: $\sigma_1+\sigma_2=2\sigma$; $\sigma_2-\sigma_1=2\tau$.

Пусть $\varphi(x, y)=C$ и $\varphi(x, y)=C'$ будут уравнения двух семейств траекторий напряжений, образующих изотермическую сеть.

Обозначим:

$$w(z)=\varphi(x,y)+i\,\psi(x,y).$$

Согласно Neményi значения σ и τ определяются следующими выражениями:

$$\sigma=\Re\int(2Az+B+iC)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz; \tag{1}$$

$$\tau=[A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D]\left|\frac{dw}{dz}\right|^2. \tag{2}$$

Здесь A, B, C, D — произвольные постоянные.

В нашем случае имеем:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2\frac{\pi x}{2l}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{2l}\right);\quad \psi(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2l}\operatorname{th}\frac{\pi y}{2l}\right);$$

$$w(z)=\ln\left(\sin\frac{\pi z}{2l}\right).$$

Подставляя это значение в выражения (1) и (2) для σ и τ, будем иметь:

$$\sigma=2A\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2\frac{\pi x}{2l}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{2l}\right)-\frac{\pi}{2l}\frac{x\sin\frac{\pi x}{l}+y\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}-\frac{\pi^2}{8l^2}(x^2-y^2)\right]-$$

$$-\frac{\pi}{4l}B\left(\frac{2\sin\frac{\pi x}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}+\frac{\pi x}{l}\right)-\frac{\pi}{4l}C\left(\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}-\frac{\pi y}{l}\right)+E; \tag{3}$$

$$\tau=[A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D]\frac{\pi^2}{4l^2}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi x}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}. \tag{4}$$

Придавая различные значения произвольным постоянным A, B, C, D и E, мы получим различные напряженные состояния.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда все постоянные кроме C равны нулю. В этом случае мы будем иметь:

$$\sigma_1=\sigma-\tau=-\frac{\pi}{2l}C\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}+\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}; \tag{5}$$

$$\sigma_2=\sigma+\tau=-\frac{\pi}{2l}C\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}-\frac{\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}. \tag{6}$$

Это напряженное состояние, как легко видеть, соответствует загружению полосы вертикальной сосредоточенной силой, приложенной в начале координат. Боковые грани оказываются при этом загруженными одинаковой для обеих граней нормальной нагрузкой, изменяющейся по закону:

$$q = -\frac{\pi}{2l} C \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l} - \frac{\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l} + 1}.$$

С достаточной степенью точности можно считать, что нормальные напряжения, приложенные к боковым граням длинной полосы, вызовут лишь соответствующие напряжения X_x, постоянные по ширине полосы, и таким образом полученное решение дает возможность исследовать напряжения, вызванные сосредоточенной силой, приложенной к торцу.

Имея значения главных напряжений, легко перейти к выражениям для напряжений в декартовых координатах, пользуясь известными соотношениями:

$$X_x = \sigma - \tau\cos 2\alpha;\quad Y_y = \sigma + \tau\cos 2\alpha;\quad X_y = -\tau\sin 2\alpha.$$

Здесь α — угол между направлением оси X и касательной к кривой $\psi = \mathrm{const}$.

В нашем случае получим следующие выражения для напряжений:

$$X_x = -\frac{\pi}{2l} C \left\{ \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}} - \frac{\pi}{2l} Y \left[1 - \frac{\sin^2\frac{\pi x}{l} - \operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right)^2} \right] \right\}; \tag{7}$$

$$Y_y = -\frac{\pi}{2l} C \left\{ \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}} - \frac{\pi}{2l} y \left[1 + \frac{\sin^2\frac{\pi x}{l} - \operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right)^2} \right] \right\}; \tag{8}$$

$$X_y = -\frac{\pi^2}{2l^2} C \frac{y \sin\frac{\pi x}{l} \operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}. \tag{9}$$

Что касается значения постоянной C, то для его нахождения мы имеем очевидное условие:

$$\int_{-l}^{+l} Y_y\, dx = -P \quad (\text{при любом значении } y).$$

(Здесь P — сжимающая сила, приложенная к торцу полосы.)

Указанное условие нам дает:

$$C = \frac{P}{\pi}.$$

Таблица 1

$x:l$ \ $y:l$	0.1	0.5	1.0	2.0
0	12.730 $\frac{P}{2l}$	2.566 $\frac{P}{2l}$	1.387 $\frac{P}{2l}$	1.026 $\frac{P}{2l}$
0.2	0.509 »	1.913 »	1.297 »	1.023 »
0.4	0.044 »	0.973 »	1.088 »	1.007 »
0.6	0.010 »	0.465 »	0.869 »	0.991 »
0.8	0.004 »	0.261 »	0.719 »	0.978 »
1.0	0.003 »	0.208 »	0.667 »	0.972 »

Значения сжимающих напряжений Y_y для различных сечений, вычисленные по формуле (8), приведены в табл. 1 (знак минус опускаем).

Значения этих напряжений вычислялись также Блейхом (при помощи рядов). Найденные им значения весьма мало отличаются от приведенных выше.

Для нахождения приближенного значения напряжений $X_x{}^0$, вызванных приложенной к торцу сосредоточенной силой P, нужно из значений X_x, определяемых формулой (7), вычесть значения напряжений, приложенных к граням $x = \pm l$.

Таким образом получим:

$$X_x^0 = X_x + \frac{P}{2l} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l} - \frac{\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}{1 + \operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}. \tag{10}$$

Вычисленные по этой формуле значения X_x^0 для $x = 0$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

$y : l$	0	0.1	0.5	1.0	2.0
X_x^0	0	$0.207\ \frac{P}{2l}$	$0.619\ \frac{P}{2l}$	$0.374\ \frac{P}{2l}$	$0.038\ \frac{P}{2l}$

Эти напряжения оказываются растягивающими.

Применение изложенного метода решений плоской задачи к другим случаям предполагаем рассмотреть в ближайшее время.

Поступило
11 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Neményi, Stromlinien und Hauptspannungstrajektorien, ZS. f. angew. Math. und Mechanik, B. 13, H. 5 (1933).