Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

М. А. РУТМАН

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 II 1938)

Будем рассматривать произвольное Banach'ово пространство E.

Пусть S — множество элементов из E, удовлетворяющее следующей группе условий:

1. Если $x \in S$, $y \in S$, то $x+y \in S$.
2. Если $x \in S$, $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda x \in S$.
3. Множество S замкнуто.
4 Если $x \in S$ и $x \neq 0$, то $-x \bar{\in} S$.

Обозначим далее через $\overline{S}$ множество функционалов «f» из $\overline{E}$, удовлетворяющих условию:

$$f(x) \geqslant 0 \text{ при любом } x \in S.$$

Можно установить следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть A — вполне непрерывный линейный оператор, обладающий такими свойствами:*

a) *Оператор A оставляет множество S инвариантным, т. е., если $x \in S$, то $Ax \in S$.*

b) *Существует такой положительный скаляр «c» и такой элемент $x_0 \in S$, что $Ax_0 - cx_0 \in S$.*

Тогда оператор A имеет в множестве S собственный вектор e ($Ae = \lambda e$; $\lambda \neq 0$).

Наложим на множество S^0 еще одно ограничение.

5. Любой элемент пространства E может быть представлен, как разность двух элементов из S.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть S удовлетворяет условиям 1—5, а оператор A — условиям теоремы 1. Тогда одно из наибольших по модулю собственных значений оператора A положительно и ему соответствует собственный вектор из S.*

Аксиома 5 наверняка выполняется, если S содержит внутренние точки. В этом случае имеет также место

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Пусть кроме того множество S содержит внутренние точки, а оператор A удовлетворяет следующему требованию: для всякого вектора $x \in S$, не* *являющегося внутренней точкой S, существует такое натуральное число $n=n(x)$, что вектор $A^n x$ лежит уже внутри S.*

Тогда оператор A имеет один и только один собственный вектор в S. Соответствующее ему положительное собственное значение есть наибольшее по модулю из всех собственных значений оператора A. Величина, обратная этому собственному значению, т. е. наименьшее по модулю характеристическое число, является простым полюсом резольвенты оператора A.

Кроме того сопряженный оператор $\overline{A}$ обладает теми же свойствами в отношении множества $\overline{S}$.

Размеры нашей статьи не позволяют привести доказательство этих предложений. Отметим только, что они базируются на принципе Schauder'а (2) о неподвижных точках и на следующих простых леммах.

Лемма 1. *Пусть S удовлетворяет условиям 1—4, а $x_0 \in S$ — некоторый фиксированный элемент.*

Отнесем к множеству S_ε те элементы x из S, для которых

$$x - |x| \varepsilon x_0 \in S \qquad (\varepsilon > 0).$$

Тогда S_ε тоже удовлетворяет аксиомам 1—4.

Лемма 2. *Существует линейный функционал $f(x)$ такого рода, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in S$* и $f(x) > \delta_\varepsilon > 0$ при $x \in S_\varepsilon$ и $|x|=1$.

Лемма 3. *Существует в S непрерывная однозначная операция Ux такая, что*

1) *если $x \in S$, то $Ux \in S_\varepsilon$;*

2) $|Ux| = |x|$;

3) $|x - Ux| < |x| \dfrac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}$.

Лемма 4. *Если оператор A обладает свойствами a) и b) теоремы 1, то повсюду в S_ε выполняется неравенство:*

$$|Ax| \geqslant |x| h; \quad h = h(\varepsilon) > 0.$$

Лемма 5. *Если оператор A обладает свойствами a) и b) теоремы 1 и если для некоторого $x \in S$*

$$Ax = \alpha x - \beta x_0; \quad \alpha > 0; \quad \beta > 0,$$

то непременно

$$\alpha \geqslant c.$$

Здесь x_0 и c те же, что и в теореме 1. Кроме этих лемм при доказательстве теорем 2 и 3 мы исследуем поведение операторов A^n ($n=1, 2, 3, 4, \ldots$) в множестве S.

Приведем некоторые приложения теорем 1, 2, 3.

α) Пусть E например означает n-мерное евклидово пространство. Выберем в качестве S множество векторов с неотрицательными компонентами, в какой-либо фиксированной системе координат. При этом конечно будут выполняться условия 1—5, и S будет иметь внутренние точки. Ясно также, что линейный оператор A будет оставлять выбранное множество S инвариантным тогда и только тогда, когда в рассматриваемой системе координат ему соответствует матрица с неотрицательными элементами. Поэтому теоремы 1, 2, 3 приводят нас в этом случае к результатам, полученным Perron'ом (3) и Frobenius'ом (4).

β) Рассмотрим пространство $C_{(a,\, b)}$ функций $\varphi(t)$, непрерывных в интервале (a, b), с нормой: $\|\varphi\| = \max |\varphi(t)|$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Здесь в качестве S можно выбрать множество неотрицательных функций. Снова конечно будут выполняться условия 1 — 5, и S будет содержать внутренние точки. Рассмотрим оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

где $K(t, s)$ непрерывна в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ и удовлетворяет условиям:

$$K(t, s) \geqslant 0$$

и при любом t_0 $(a < t_0 < b)$ функция от s

$$K(t_0 s) \not\equiv 0.$$

Тогда к оператору A можно применить теоремы 1, 2. Поэтому из наших результатов можно получить для неотрицательных ядер теорему Jentsch'а ([5]) с тем расширением, которое указал Ф. Р. Гантмахер ([6]).

γ) Рассмотрим пространство Hilbert'а, векторами которого, как известно, являются последовательности вещественных чисел со сходящейся суммой квадратов. Как и в α), выберем в качестве S множество векторов, имеющих неотрицательные координаты. Множество S будет удовлетворять условиям 1 — 5, но, как легко видеть, не будет содержать внутренних точек. Линейный вполне непрерывный оператор, оставляющий множество S инвариантным, будет задаваться с помощью вполне непрерывной матрицы с неотрицательными элементами. На основании теорем 1 и 2 имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\| a_{ik} \|_1^\infty$ — *бесконечная вполне непрерывная вещественная матрица. Пусть все элементы этой матрицы неотрицательны, а среди диагональных имеется хотя бы один положительный. Тогда среди наибольших по модулю собственных значений этой матрицы имеется положительное, которому соответствует собственный вектор с неотрицательными компонентами.*

Эта теорема позволяет перенести ряд основных результатов теории осцилляционных матриц Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна ([7]) на бесконечные вполне непрерывные матрицы $\| a_{ik} \|_1^\infty$, обладающие тем свойством, что всякий отрезок $\| a_{ik} \|_1^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ есть осцилляционная матрица.

Одесский государственный
университет.

Поступило
13 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach, Théorie des opérations linéaires (1932). [2] J. Schauder, Studia mathematica, **2**, 176 (1930). [3] Perron, Math. Ann., **64**, 1—76 (1907). [4] Frobenius, Sitzungsber., Berlin, 471—476 (1908); 514—518 (1909); 456—477 (1912). [5] Jentsch, Journ. f. Math., **141**, 235—244 (1912). [6] Ф. Р. Гантмахер, ДАН, I (X), № 1 (78) (1936). [7] F. Gantmakher et M. Krein, Compositio Mathematica, **4** (3), 445—476 (1937).